

УДК 512.815.1, 512.816.2

О. Г. Стырт

О пространстве орбит трёхмерной компактной линейной группы Ли

Исследуется вопрос о том, является ли топологический фактор вещественного линейного представления простой трёхмерной компактной группы Ли многообразием. Получена верхняя оценка размерности представления, фактор которого является многообразием; разобрано большинство оставшихся случаев.

Библиография: 1 наименование.

Ключевые слова: группа Ли, топологический фактор действия.

§ 1. Введение

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи [1]. Прежде всего дадим три базовых определения, игравших ключевую роль и в [1].

Определение. Непрерывное отображение гладких многообразий назовём *кусочно-гладким*, если оно переводит любое гладкое подмногообразие в конечное объединение гладких подмногообразий.

В частности, всякое собственное гладкое отображение гладких многообразий является кусочно-гладким.

Рассмотрим дифференцируемое действие некоторой компактной группы Ли G на гладком многообразии M .

Определение. Будем говорить, что фактор действия $G: M$ *диффеоморфен* (*кусочно-диффеоморфен*) гладкому многообразию M' , если топологический фактор M/G гомеоморфен M' , причём отображение факторизации $M \rightarrow M'$ гладкое (кусочно-гладкое).

Определение. Будем говорить, что фактор действия $G: M$ является *гладким многообразием*, если он кусочно-диффеоморфен некоторому гладкому многообразию.

Перейдём непосредственно к постановке задачи.

Рассмотрим линейное представление компактной группы Ли G в вещественном пространстве V . Нас по-прежнему (как и в [1]) интересует вопрос о том, является ли фактор

тор V/G этого действия топологическим многообразием, а также является ли он гладким многообразием. Следуя [1], будем далее для краткости называть топологическое многообразие просто «многообразием».

Через G^0 будем обозначать связную компоненту единицы группы G , а через \mathfrak{g} — её касательную алгебру.

Случай, когда группа G^0 коммутативна, был разобран в [1]. Данная же работа посвящена исследованию поставленной проблемы в предположении, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$.

В пространстве V можно зафиксировать G -инвариантное скалярное умножение. Тогда группа G действует ортогональными операторами: $G \subset \mathbf{O}(V)$.

Для любой одномерной подалгебры (что то же самое, одномерного подпространства) $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ подмножество $\mathfrak{g}'V \subset V$ является, очевидно, подпространством.

Допустим, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$ — что равносильно, группа G^0 изоморфна одной из групп \mathbf{SU}_2 и \mathbf{SO}_3 .

Обозначим через n_1, \dots, n_L размерности неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}: V$ (с учётом кратностей). Если все числа n_i равны 1, то группа G^0 действует на V тождественно, и вопрос описания фактора V/G сводится к аналогичному вопросу для действия конечной группы G/G^0 в пространстве V . Поэтому будем считать, что $n_1 \geq \dots \geq n_l > 1 = n_{l+1} = \dots = n_L$, $l = 1, \dots, N$. Число $\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$ является натуральным при $n_i > 1$ и равно нулю при $n_i = 1$. Положим $q(V) := \sum_{i=1}^L \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor = \sum_{i=1}^l \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor \in \mathbb{N}$.

В §4 будут доказаны теоремы 1.1—1.3.

Теорема 1.1. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а V/G — гладкое многообразие, то $q(V) \leq 4$.*

Теорема 1.2. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а V/G — многообразие, то $q(V) > 2$.*

Следствие 1.1. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а V/G — гладкое многообразие, то $q(V) \in \{3; 4\}$.*

Теорема 1.3. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, $G = G^0$, V/G — гладкое многообразие, а среди чисел $\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$, $i = 1, \dots, l$, хотя бы одно нечётно, то $q(V) = 3$.*

Согласно следствию 1.1 и теореме 1.3, если $G = G^0$, а V/G — гладкое многообразие, то представление $G: V_0^\perp$ относится к одному из типов, приведённых в таблице 1. В §5 мы докажем теоремы 1.4—1.8, описывающие большую часть этих случаев.

Table 1.

№	l	n_1, \dots, n_l
1)	2	4, 4
2)	2	4, 3
3)	3	3, 3, 3
4)	2	5, 4
5)	1	7

Продолж. на сл. стр.

Table 1.

№	l	n_1, \dots, n_l
6)	1	8
7)	1	9
8)	2	5, 3
9)	2	5, 5

Теорема 1.4. *Предположим, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, а для чисел l и n_1, \dots, n_l имеет место одна из следующих комбинаций:*

- 1) $l = 2, n_1 = n_2 = 4$;
- 2) $l = 2, n_1 = 4, n_2 = 3$;
- 3) $l = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 3$.

Тогда фактор V/G^0 диффеоморфен векторному пространству, причём группа G/G^0 действует на нём линейно.

Замечание. Теорема 1.4 позволяет в каждом из случаев 1)–3) её формулировки свести исходное представление $G: V$ к линейному представлению конечной группы G/G^0 в векторном пространстве V/G^0 (см. лемму 2.1).

Теорема 1.5. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, $G = G^0$, $l = 2$, $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, то фактор V/G не является гладким многообразием.*

Теорема 1.6. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, $G = G^0$, $l = 1$, $n_1 = 7$, то $V/G \cong \mathbb{R}^4$.*

Теорема 1.7. *Если $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, $G = G^0$, $l = 1$, $n_1 = 8$, то $V/G \cong \mathbb{R}^5$.*

Теорема 1.8. *Если $G = G^0$, $l = 2$, $n_1 = 5$, $n_2 = 3$, то $V/G \cong \mathbb{R}^5$.*

§ 2. Обозначения и вспомогательные факты

Здесь мы напомним некоторые принятые в [1] определения и обозначения. Кроме того, будут сформулированы несколько результатов (леммы 2.1–2.10), полученных в [1], и их простейших следствий.

Лемма 2.1. *Пусть имеется линейное представление компактной группы Ли G в векторном пространстве V . Предположим, что для некоторой нормальной подгруппы $H \triangleleft G$ фактор V/H диффеоморфен гладкому многообразию M . Тогда факторы M/G и V/G являются или не являются гладкими многообразиями одновременно.*

Лемма 2.2. *Допустим, что у орбиты общего положения представления $G: V$ гомотопическая группа π_k ($k > 0$) нетривиальна, а в V/G любой страт, отличный от главного, имеет коразмерность более $k + 2$. Тогда V/G не есть гладкое многообразие.*

Пусть G_v — стабилизатор вектора $v \in V$, а $\mathfrak{g}_v := \text{Lie } G_v = \{\xi \in \mathfrak{g} : \xi v = 0\}$. Группа G_v переводит в себя подпространства $T_v(Gv) = \mathfrak{g}v$ и $N_v := (\mathfrak{g}v)^\perp$. Через M_v будем обозначать ортогональное дополнение в N_v к подпространству $N_v^{G_v}$ неподвижных векторов для действия $G_v : N_v$. Тогда $V = \mathfrak{g}v \oplus N_v^{G_v} \oplus M_v$ и $G_v M_v = M_v$.

Лемма 2.3. *Если $v \in V$ — произвольный вектор, а V/G — (гладкое) многообразие, то и N_v/G_v — (гладкое) многообразие.*

Лемма 2.4. *Любое G^0 -инвариантное подпространство $V' \subset V$ содержит вектор v , для которого $M_v \perp V'$.*

Для $g \in G$ положим $\omega(g) := \text{rk}(E - g) - \text{rk}(E - \text{Ad}(g))$. Далее, пусть $\Omega := \{g \in G : \omega(g) \in \{0; 2\}\} \subset G$ и

$$V_0 := \{v \in V : G^0 v = \{v\}\} = \{v \in V : \mathfrak{g}v = 0\} \subset V. \quad (2.1)$$

Для всякого вектора $v \in V$ с конечным стабилизатором и элемента $g \in G_v$ имеем $\dim((E - g)N_v) = \omega(g)$.

Лемма 2.5. *Если стабилизатор G_v вектора $v \in V$ конечен, а фактор V/G является гладким многообразием, то $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$.*

Для подпространства $W \subset V$ обозначим через $G[W] \subset G$ подгруппу Ли всех элементов из G , действующих тождественно на W^\perp . Очевидно, что подпространство W инвариантно относительно $G[W]$.

Лемма 2.6. *Пусть $W \subset V$ — ненулевое G^0 -инвариантное подпространство, причём на его единичной сфере группа $G[W]$ действует транзитивно. Тогда V/G — не многообразие.*

Пусть P — множество векторов в конечномерном пространстве над произвольным полем. Некоторые из них могут совпадать; кратности учитываются. Количество ненулевых векторов множества P (с учётом кратностей) обозначим через $\|P\|$. Напомним определения m -устойчивых ($m \in \mathbb{N}$) и неразложимых множеств векторов, данные в [1] и необходимые также в данной работе.

Разложением множества векторов конечномерного линейного пространства на компоненты будем называть его представление в виде объединения своих подмножеств, линейные оболочки которых линейно независимы. Если среди этих линейных оболочек по крайней мере две нетривиальны, то такое разложение назовём *собственным*. Будем говорить, что множество *неразложимо*, если оно не допускает ни одного собственного разложения на компоненты. Всякое множество векторов разлагается на неразложимые компоненты единственным образом (с точностью до распределения нулевого вектора), причём для любого его разложения на компоненты каждая компонента является объединением некоторых его неразложимых компонент (вновь с точностью до нулевого вектора).

Определение. Конечное множество векторов конечномерного пространства, рассматриваемое с учётом кратностей своих элементов, назовём q -устойчивым ($q \geq 0$), если его линейная оболочка не меняется при удалении из него любых векторов в количестве не более q (с учётом кратностей).

Теперь будем считать группу G^0 коммутативной. Любое её неприводимое представление либо одномерно, либо двумерно. Во втором случае оно обладает G^0 -инвариантной комплексной структурой, и ему соответствует вес $\lambda: G^0 \rightarrow \mathbb{T}$, который можно отождествить с его дифференциалом — линейной функцией $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$. Последнюю можно понимать как вектор из \mathfrak{g} , используя скалярное умножение на \mathfrak{g} , инвариантное относительно $\text{Ad}(G)$. Оператор G^0 -инвариантной комплексной структуры данного представления определён с точностью до смены знака; то же можно сказать и про вес $\lambda \in \mathfrak{g}$. Одномерному представлению G^0 сопоставим нулевой вес $\lambda \in \mathfrak{g}$. Через $P \subset \mathfrak{g}$ обозначим множество весов λ , соответствующее разложению V в прямую сумму неприводимых представлений группы G^0 (с учётом кратностей). Это множество не зависит от выбора разложения (с точностью до знаков весов). Подпространство V_0^\perp имеет G^0 -инвариантную структуру комплексного пространства размерности $\|P\|$. Пусть V_λ ($\lambda \in P$) — изотипная компонента представления $G^0: V$, соответствующая неприводимым представлениям с весом λ , а V_Q ($Q \subset P$) — прямая сумма всех компонент V_λ , $\lambda \in Q$. В частности, такое определение V_0 согласуется с определением (2.1), где не требуется коммутативность G^0 .

Лемма 2.7. Если V/G — многообразие, то P — 1-устойчивое множество.

Следствие 2.1. Если V/G — многообразие, то $\|P\| \neq 1$.

Множество всех ненулевых весов в P можно разложить в дизъюнктное объединение неразложимых компонент $Q \subset P \setminus \{0\}$.

Для произвольного линейного представления $G: V$ и целого неотрицательного числа d будем, если не оговорено противное, подразумевать под записью $(V \oplus \mathbb{R}^d)/G$ фактор линейного представления

$$G: V \oplus \mathbb{R}^d, g: v + x \rightarrow gv + x, g \in G, v \in V, x \in \mathbb{R}^d.$$

Лемма 2.8. Допустим, что P — 2-устойчивое множество, а V/G — гладкое многообразие. Тогда для любой неразложимой компоненты $Q \subset P \setminus \{0\}$ найдётся число $d \geq 0$, такое что $(V_Q \oplus \mathbb{R}^d)/G$ — гладкое многообразие.

Предположим, что $\dim G = 1$ (как следствие, алгебра \mathfrak{g} и группа G^0 одномерны и коммутативны). В этом случае P — неразложимое множество, а его 2-устойчивость эквивалентна тому, что $\|P\| \notin \{1; 2\}$.

Лемма 2.9. Если P — 2-устойчивое множество, $\dim G = 1$, $V_0 = 0 \neq V$, а фактор $(V \oplus \mathbb{R}^d)/G$ является гладким многообразием для некоторого d , то $\|P\| = 3$.

Лемма 2.10. Если P — 2-устойчивое множество, $\dim G = 1$, $\text{Ad}(G) = \{E\}$ и $V_0 \neq V$, то V/G не есть гладкое многообразие.

Следствие 2.2. Допустим, что $\dim G = 1$, а V/G — гладкое многообразие. Тогда

- 1) число $\|P\|$ не превосходит 3;
- 2) если $\text{Ad}(G) = \{E\}$, то $\|P\| \leq 2$.

□ Если $\|P\| < 3$, то оба утверждения верны.

Далее будем считать, что $\|P\| \geq 3$. В таком случае $V_0 \neq V$, а P — 2-устойчивое множество. Теперь первое утверждение вытекает из лемм 2.8 и 2.9 (при $Q := P \setminus \{0\}$), а второе — из леммы 2.10. ■

Следствие 2.3. Предположим, что $\dim G = 1$. Тогда

- 1) если V/G — многообразие, то $\dim(\mathfrak{g}V) \neq 2$;
- 2) если V/G — гладкое многообразие, то $\dim(\mathfrak{g}V) \leq 6$;
- 3) если $\text{Ad}(G) = \{E\}$, а V/G — гладкое многообразие, то $\dim(\mathfrak{g}V) \leq 4$.

□ Имеем $\dim(\mathfrak{g}V) = \dim V_0^\perp = 2 \dim_{\mathbb{C}} V_0^\perp = 2\|P\|$. Осталось воспользоваться следствиями 2.1 и 2.2. ■

§ 3. Представления трёхмерных групп

Здесь будут перечислены основные свойства неприводимых вещественных представлений групп \mathbf{SU}_2 и \mathbf{SO}_3 .

Пусть $V(m)$ ($m \in \mathbb{N}$) — комплексное представление группы \mathbf{SU}_2 на пространстве однородных многочленов из $\mathbb{C}[x, y]$ степени $m - 1$ сдвигом аргумента.

Размерность каждого неприводимого представления группы \mathbf{SU}_2 либо кратна 4, либо нечётна. Неприводимое представление размерности $4m$ — это овеществление комплексного представления $V(2m)$. Неприводимое представление размерности $2m + 1$ — это вещественная форма $V_{\mathbb{R}}(2m + 1)$ комплексного представления $V(2m + 1)$, состоящая из всех многочленов $\sum_{|k| \leq m} c_k x^{m+k} y^{m-k}$, таких что $c_{-k} = (-1)^k \overline{c_k}$. Любое неприводимое

представление нечётной размерности абсолютно неприводимо, а тело его эндоморфизмов есть $\{cE : c \in \mathbb{R}\}$.

Всякое неприводимое представление группы \mathbf{SO}_3 имеет нечётную размерность и получается из неприводимого представления \mathbf{SU}_2 той же размерности факторизацией $\mathbf{SU}_2 \rightarrow \mathbf{SU}_2 / \{\pm E\} \cong \mathbf{SO}_3$ по его ядру неэффективности $\{\pm E\} \subset \mathbf{SU}_2$.

Лемма 3.1. Рассмотрим $(2m + 1)$ -мерное неприводимое представление группы, изоморфной \mathbf{SU}_2 либо \mathbf{SO}_3 .

- 1) Если число m нечётно, то существует вектор, стабилизатор которого является одномерным тором.
- 2) Если $m > 1$, то найдётся вектор с нетривиальным конечным стабилизатором.

□ Можно отождествить данное представление с $V_{\mathbb{R}}(2m+1)$. Положим $f := x^m y^m \in V_{\mathbb{R}}(2m+1)$.

- 1) Подгруппа всех элементов из \mathbf{SU}_2 , переводящих в себя прямую $\mathbb{R}f$, совпадает с подгруппой всех диагональных и побочно-диагональных матриц. Все диагональные матрицы из \mathbf{SU}_2 переводят f в себя, а побочно-диагональные — в многочлен $(-1)^m f$. Таким образом, f — искомый многочлен в первом утверждении.
- 2) По условию $m > 1$. Всякий многочлен из $V_{\mathbb{R}}(2m+1)$ с бесконечным стабилизатором в группе \mathbf{SU}_2 лежит в одной орбите с некоторым многочленом из $\mathbb{R}f$ и потому имеет кратные корни. Следовательно, многочлен $x^{2m} + (-1)^m y^{2m} \in V_{\mathbb{R}}(2m+1)$ является требуемым: он не имеет кратных корней и переходит в себя под действием элемента $\text{diag}(e^{\pi i/m}; e^{-\pi i/m}) \in \mathbf{SU}_2 \setminus \{\pm E\}$. ■

Зачастую оказывается удобным отождествлять группу \mathbf{SU}_2 с группой $\{\lambda \in \mathbb{H} : |\lambda| = 1\}$ по умножению. Её трёхмерное неприводимое представление можно понимать как тавтологическое представление $\mathbf{SO}_3 : \mathbb{R}^3$ или как действие группы кватернионов с модулем 1 на пространстве \mathbb{H}_0 чисто мнимых кватернионов сопряжениями. Четырёхмерное же неприводимое представление группы \mathbf{SU}_2 есть не что иное как действие группы кватернионов с модулем 1 на пространстве кватернионов правыми сдвигами, а тело его эндоморфизмов есть тело операторов левых сдвигов на всевозможные кватернионы. В обоих случаях действие группы на единичной сфере пространства представления транзитивно. Наиболее наглядной интерпретацией пятимерного неприводимого представления группы \mathbf{SO}_3 является её действие на пространстве симметрических матриц из $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ со следом 0 матричными сопряжениями.

Как известно, при стереографической проекции $\mathbb{CP}^1 \rightarrow S^2$ проективизация тавтологического представления $\mathbf{SU}_2 : \mathbb{C}^2$ становится тавтологическим действием $\mathbf{SO}_3 : S^2$. Разлагая на линейные множители все ненулевые многочлены комплексного пространства $V(m)$ ($m \in \mathbb{N}$), можно отождествить множество его прямых с симметрической степенью $SP^{m-1}(\mathbb{CP}^1)$. При этом проективизация комплексного представления $\mathbf{SU}_2 : V(m)$ совпадёт с тавтологическим действием $\mathbf{SO}_3 : SP^{m-1}(S^2)$, поскольку при действии элемента $g \in \mathbf{SU}_2$ на проективном пространстве $PV(m)$ вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, соответствующий линейному множителю $\bar{a}x + \bar{b}y$, умножается слева на матрицу g . Допустим, что число m нечётно. Тогда разложение на линейные множители любого ненулевого многочлена $f \in V_{\mathbb{R}}(m)$ вместе с множителем $ax + by$ включает в себя и $(-\bar{b}x + \bar{a}y)$ — что равносильно, соответствующий неупорядоченный набор из $m-1$ точки сферы S^2 сохраняется при замене каждой точки на диаметрально противоположную ей. Если многочлен $f \in V(m) \setminus \{0\}$ удовлетворяет импликации $(ax + by) \mid f \Leftrightarrow (-\bar{b}x + \bar{a}y) \mid f$ для любых $a, b \in \mathbb{C}$, то все числа $\lambda \in \mathbb{C}$, такие что $\lambda f \in V_{\mathbb{R}}(m)$, образуют прямую в \mathbb{C} . Следовательно, проективизация вещественного представления $\mathbf{SO}_3 : V_{\mathbb{R}}(m)$ — это то же самое, что тавтологическое действие $\mathbf{SO}_3 : SP^{\frac{m-1}{2}}(\mathbb{RP}^2)$.

§ 4. Доказательства основных результатов

Этот параграф будет посвящён доказательству теорем 1.1–1.3.

Далее (до конца работы) будем считать, что $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$, то есть что группа G^0 изоморфна \mathbf{SU}_2 либо \mathbf{SO}_3 . В обозначениях и соглашениях § 1, $L - l = \dim V_0$, $V_0 \neq V$, а числа n_1, \dots, n_l суть размерности неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}: V_0^\perp$ (с учётом кратностей), причём каждое из них либо кратно 4, либо нечётно.

Любая собственная подалгебра $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ одномерна, а подпространство $\mathfrak{g}'V$ имеет размерность $2q(V)$. Если $\xi \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$, то $\xi V_0 = 0$, $\xi V = \xi V_0^\perp \subset V_0^\perp$, $\dim(\xi V_0^\perp) = \dim(\xi V) = 2q(V)$, и

$$\dim(\text{Ker}(\xi|_{V_0^\perp})) = \dim V_0^\perp - 2q(V) = \sum_{i=1}^l n_i - 2 \sum_{i=1}^l \left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor = 2 \sum_{i=1}^l \left\{ \frac{n_i}{2} \right\}. \quad (4.1)$$

4.1. Доказательство теоремы 1.1

Гомотопическая группа $\pi_3(G)$ нетривиальна, так как существует накрытие $\mathbf{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathbf{SO}_3$, а группа \mathbf{SU}_2 гомеоморфна трёхмерной сфере.

Достаточно доказать теорему при дополнительном предположении, что группа G действует на V_0 тождественно. В самом деле, найдётся вектор $v \in V_0$, для которого $M_v \subset V_0^\perp$ (см. лемму 2.4). Тогда $\mathfrak{g}v = 0$, $\text{Lie } G_v = \mathfrak{g}_v = \mathfrak{g}$, $N_v = V$, $V^{G_v} = N_v^{G_v} = M_v^\perp \supset V_0$. Если V/G — гладкое многообразие, то и $V/G_v = N_v/G_v$ — гладкое многообразие. При переходе от представления $G: V$ к представлению $G_v: V$ остаются прежними представление алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_v$ в пространстве V , подпространство V_0 и число $q(V)$. Наконец, группа G_v действует тождественно на V_0 .

В дальнейшем будем считать, что V/G — гладкое многообразие, а G действует на V_0 тождественно. Требуется доказать, что $q(V) \leq 4$.

Допустим, что существует вектор $v \in V$ с одномерным стабилизатором в G . Согласно лемме 2.3, N_v/G_v — гладкое многообразие. В силу следствия 2.3, $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) \leq 6$. Кроме того, $\dim(\mathfrak{g}v) = 2$ и $\mathfrak{g}_v V = \mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}v) \oplus \mathfrak{g}_v N_v$, поэтому $\dim(\mathfrak{g}_v V) \leq 8$, $q(V) = \frac{1}{2} \dim(\mathfrak{g}_v V) \leq 4$.

Теперь предположим, что в пространстве V нет ни одного вектора с одномерным стабилизатором.

Для любого вектора $v \in V \setminus V_0$ алгебра \mathfrak{g}_v не является одномерной и не совпадает с \mathfrak{g} , значит, $\mathfrak{g}_v = 0$, $\dim(\mathfrak{g}v) = 3$. Отсюда всякое \mathfrak{g} -инвариантное подпространство размерности не более 2 содержится в V_0 .

Допустим, что $q(V) > 4$.

Покажем, что $\Omega = \{E\}$, то есть что произвольный оператор $g \in \Omega$ тождественный.

Если $\text{Ad}(g) = E$, то оператор g коммутирует со всеми операторами из \mathfrak{g} , следовательно, подпространство $(E - g)V$ инвариантно относительно \mathfrak{g} . Оно имеет размерность

$\text{rk}(E - g) = \omega(g) \leq 2$ и потому содержится в V_0 . Отсюда $(E - g)V = (E - g)V_0 = 0$, $g = E$.

Если же $\text{Ad}(g) \neq E$, то $\text{rk}(E - \text{Ad}(g)) = 2$, и $\text{rk}(E - g) = \omega(g) + 2 \leq 4$. Рассмотрим вектор $\xi \in \mathfrak{g}$, для которого $\eta := (E - \text{Ad}(g))\xi \neq 0$. Тогда

$$\eta V^g = (\eta + \text{Ad}(g)\xi(E - g))V^g = (E - g)(\xi V^g).$$

Значит, каждое из подпространств V^g и $(E - g)V$ под действием η переходит в подпространство размерности не более $\text{rk}(E - g) \leq 4$. Для оператора $g \in \mathbf{O}(V)$ выполнено равенство $V = V^g \oplus (E - g)V$, откуда $\dim(\eta V) \leq 8$, $q(V) = \frac{1}{2} \dim(\eta V) \leq 4$. Получили противоречие.

Тем самым мы доказали, что $\Omega = \{E\}$.

Согласно (4.1), $\dim V_0^\perp \geq 2q(V) > 8$, $\dim V > \dim V_0 + 8$, $\dim(V/G) \geq \dim V - \dim G = \dim V - 3 > \dim V_0 + 5$. Для любого вектора $v \in V \setminus V_0$ алгебра \mathfrak{g}_v тривиальна, то есть стабилизатор G_v конечен. В силу леммы 2.5, он порождён своим пересечением с Ω и поэтому тривиален. Следовательно, все векторы из $V \setminus V_0$ лежат в главном страте, стабилизатор общего положения тривиален, орбита общего положения гомеоморфна G , а её гомотопическая группа π_3 нетривиальна. Всякий страт в V , отличный от главного, содержится в V_0 . Значит, все страты фактора V/G , кроме главного, имеют размерность не более $\dim(V_0/G) = \dim V_0$ и коразмерность не менее $\dim(V/G) - \dim V_0 > 5$. Применяя лемму 2.2 для числа $k := 3$, приходим к противоречию с тем, что V/G — гладкое многообразие.

Теорема 1.1 доказана.

4.2. Доказательство теоремы 1.2

Допустим, что $q(V) \leq 2$.

- 1) Если $q(V) = 1$, то $l = 1$ и $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor = 1$, $n_1 = 3$.
- 2) Если пространство V не содержит ни одного вектора с одномерным стабилизатором в G , то ограничение любого оператора $\xi \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ на подпространство V_0^\perp невырождено. В силу (4.1), числа n_1, \dots, n_l кратны 4, а также $\sum_{i=1}^l n_i = \dim V_0^\perp = 2q(V) \leq 4$, откуда $l = 1$ и $n_1 = 4$.

В каждом из случаев 1) и 2) представление $G^0: V_0^\perp$ неприводимо, его размерность равна 3 либо 4, и на его единичной сфере группа $G^0 \subset G[V_0^\perp]$ действует транзитивно. Пользуясь леммой 2.6, приходим к противоречию с тем, что V/G — многообразие.

Значит, $q(V) = 2$, причём существует вектор $v \in V$ с одномерным стабилизатором G_v . Согласно лемме 2.3, N_v/G_v — многообразие. В силу следствия 2.3, $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) \neq 2$. С другой стороны, $\dim(\mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}v)) = \dim(\mathfrak{g}v) = 2$ и $\mathfrak{g}_v V = \mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}v) \oplus \mathfrak{g}_v N_v$, поэтому $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) = 2q(V) - 2 = 2$. Полученное противоречие доказывает теорему 1.2.

Из теорем 1.1 и 1.2 сразу вытекает следствие 1.1.

4.3. Доказательство теоремы 1.3

Предположим, что группа G изоморфна одной из групп \mathbf{SU}_2 и \mathbf{SO}_3 , фактор V/G является гладким многообразием, а число $m := \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$ нечётно для некоторого $i \in \{1, \dots, l\}$. Тогда $n_i = 2m + 1$, поскольку $2m$ — чётное число, не кратное 4. Одна из неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}: V_0^\perp$ имеет размерность $2m + 1$ и по лемме 3.1 содержит вектор v с одномерным коммутативным стабилизатором. Согласно лемме 2.3, N_v/G_v — гладкое многообразие. В силу следствия 2.3, $\dim(\mathfrak{g}_v N_v) \leq 4$. Кроме того, $\dim(\mathfrak{g}v) = 2$ и $\mathfrak{g}_v V = \mathfrak{g}_v(\mathfrak{g}v) \oplus \mathfrak{g}_v N_v$, откуда $\dim(\mathfrak{g}_v V) \leq 6$, $q(V) = \frac{1}{2} \dim(\mathfrak{g}_v V) \leq 3$. Осталось воспользоваться следствием 1.1.

Тем самым теорема 1.3 доказана.

§ 5. Разбор частных случаев

Здесь будут доказаны теоремы 1.4–1.8.

5.1. Доказательство теоремы 1.4

Все автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2$ внутренние, и, значит, подгруппа $\mathcal{Z}(G^0) = \{g \in G: \text{Ad}(g) = E\}$ пересекает все связные компоненты группы G . Поэтому достаточно доказать, что фактор действия $G^0: V$ диффеоморфен векторному пространству, причём на нём действует линейно любой ортогональный оператор в V , перестановочный с указанным действием. Далее, можно считать, что $V_0 = 0$, поскольку V_0 и V_0^\perp — G -инвариантные подпространства, а действие $G^0: V_0$ тождественно. Тогда размерности неприводимых компонент представления $G^0: V$ (с учётом кратностей) суть n_1, \dots, n_l .

Для доказательства теоремы 1.4 потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 5.1. *Для любых чисел $k \in \mathbb{N}$, $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{R}$ и $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ существует единственное вещественное число t , удовлетворяющее условиям $\forall i \ t + d_i \geq 0$ и $\prod_{i=1}^k (t + d_i) = d$.*

□ Без ограничения общности можно считать, что $d_1 \leq \dots \leq d_k$.

Ясно, что $\forall i \ t + d_i \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -d_1$. Ограничение полиномиальной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \prod_{i=1}^k (t + d_i)$ на промежуток $[-d_1; +\infty)$ строго возрастает, обращается в нуль в точке $-d_1$, стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и потому принимает каждое неотрицательное значение ровно в одной точке. В частности, $\exists! t \in [-d_1; +\infty): f(t) = d$. ■

Дальнейшая часть доказательства теоремы 1.4 будем проходить отдельно для каждого из случаев 1)–3), указанных в её формулировке.

Случай 1). $l = 2$, $n_1 = n_2 = 4$.

Для каждой прямоугольной матрицы $A = (a_{ij})$ над телом \mathbb{H} определена прямоугольная матрица $A^* := (\overline{A})^T$. Если число столбцов матрицы A_1 равно числу строк матрицы A_2 , то $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$.

Пространство V можно отождествить с пространством $\text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{H})$, в котором всякий вектор z имеет скалярный квадрат $z^* z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, а кватернион h с модулем 1, рассматриваемый как элемент группы \mathbf{SU}_2 , действует умножением матриц 2×1 справа на матрицу 1×1 с единственным элементом h^{-1} , то есть правым умножением координат векторов-столбцов на h^{-1} .

Выясним, как устроен фактор V/G^0 . Если два вектора-столбца $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ и $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $z_i, w_i \in \mathbb{H}$, лежат в одной орбите действия $G^0: V$, то $|z_i| = |w_i|$ ($i = 1, 2$) и $z_1 \overline{z_2} = w_1 \overline{w_2}$. Обратное утверждение тоже верно. В самом деле, если модули координат векторов z и w попарно равны и среди этих модулей есть нулевой, то $w \in G^0 z$, а если модули их координат попарно равны и все отличны от нуля, то $w \in G^0 z \Leftrightarrow z_1 \overline{z_2} = w_1 \overline{w_2}$.

Отображение $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow (|z_1|^2; |z_2|^2; z_1 \overline{z_2})$ постоянно на орбитах действия $G^0: V$ и разделяет их, а его образом является подмножество

$$M := \{(d_1; d_2; \lambda): d_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \lambda \in \mathbb{H}, d_1 d_2 = |\lambda|^2\} \subset \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}.$$

Далее, отображение $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$, $(d_1; d_2; \lambda) \rightarrow (d_1 - d_2; \lambda)$ биективно: прообраз вектора $(d; \lambda) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$ совпадает с подмножеством $\{(t + d; t; \lambda): t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t + d \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t(t + d) = |\lambda|^2\} \subset M$ и, согласно утверждению 5.1, состоит ровно из одного элемента. Значит, гладкое отображение $\pi': V \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow (|z_1|^2 - |z_2|^2; z_1 \overline{z_2})$, равное $\varphi \circ \pi$, сюръективно, постоянно на орбитах группы G^0 и разделяет их.

Первое утверждение теоремы доказано. Докажем теперь второе.

Подпространство $S \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{H})$ всех эрмитовых кватернионных матриц содержит прямую $\mathbb{R}E$; диагональные элементы любой матрицы из S вещественны. Линейное отображение $S \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$, $D \rightarrow (d_{11} - d_{22}; d_{12})$ сюръективно, имеет ядро $\mathbb{R}E$ и потому индуцирует линейный изоморфизм $S/(\mathbb{R}E) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}$, при помощи которого можно отождествить фактор V/G^0 с пространством $S/(\mathbb{R}E)$. Отображение факторизации $\pi': V \rightarrow S/(\mathbb{R}E)$ примет вид $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} |z_1|^2 & z_1 \overline{z_2} \\ z_2 \overline{z_1} & |z_2|^2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}E$, то есть $z \rightarrow zz^* + \mathbb{R}E$ (ясно, что $zz^* \in S$).

Ассоциативная алгебра эндоморфизмов представления $G^0: V$ канонически отождествляется с ассоциативной алгеброй $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{H})$, действующей на пространстве $V = \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{H})$ умножениями слева. Предположим, что оператор $B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{H})$ в пространстве V ортогонален. Тогда $BB^* = E$. Если $z \in \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{H})$ — произвольный вектор,

то $Bz(Bz)^* = B(zz^*)B^*$. Поскольку линейный оператор $S \rightarrow S$, $D \rightarrow BDB^* = BDB^{-1}$ переводит в себя матрицу E и прямую $\mathbb{R}E$, оператор B действует линейно на факторе $V/G^0 \cong S/(\mathbb{R}E)$.

Случай 2). $l = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$.

Доказательство во многом повторяет доказательство случая 1).

Пространство V можно отождествить с пространством $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}_0$ (см. § 3), в котором всякий вектор $(z; z_0)$ имеет скалярный квадрат $|z|^2 + |z_0|^2$, а кватернион h с модулем 1, рассматриваемый как элемент группы \mathbf{SU}_2 , действует по формуле $(z; z_0) \rightarrow (zh^{-1}; hz_0h^{-1})$.

Выясним, как устроен фактор V/G^0 . Если два вектора $(z; z_0)$ и $(w; w_0)$ из $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}_0$ лежат в одной орбите действия $G^0: V$, то $|z| = |w|$, $|z_0| = |w_0|$ и $zz_0\bar{z} = ww_0\bar{w}$. Обратное утверждение тоже верно. В самом деле, если модули координат векторов $(z; z_0)$ и $(w; w_0)$ по прямым слагаемым \mathbb{H} и \mathbb{H}_0 попарно равны и среди этих модулей есть нулевой, то $(w; w_0) \in G^0(z; z_0)$, а если модули их координат попарно равны и все отличны от нуля, то $(w; w_0) \in G^0(z; z_0) \Leftrightarrow zz_0\bar{z} = ww_0\bar{w}$.

Отображение $\pi: V \rightarrow \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}_0$, $(z; z_0) \rightarrow (|z|^2; |z_0|^2; zz_0\bar{z})$ постоянно на орбитах действия $G^0: V$ и разделяет их, а его образом является подмножество

$$M := \{(d; d_0; \lambda): d, d_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \lambda \in \mathbb{H}_0, d^2d_0 = |\lambda|^2\} \subset \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}_0.$$

Далее, отображение $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, $(d; d_0; \lambda) \rightarrow (d - d_0; \lambda)$ биективно: прообраз вектора $(d; \lambda) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$ совпадает с подмножеством $\{(t + d; t; \lambda): t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t + d \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t(t + d)^2 = |\lambda|^2\} \subset M$ и, согласно утверждению 5.1, состоит ровно из одного элемента. Значит, гладкое отображение $\pi': V \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$, $(z; z_0) \rightarrow (|z|^2 - |z_0|^2; zz_0\bar{z})$, равное $\varphi \circ \pi$, сюръективно, постоянно на орбитах группы G^0 и разделяет их.

Рассмотрим произвольный эндоморфизм B представления $G^0: V$. Он переводит в себя изотипные компоненты \mathbb{H} и \mathbb{H}_0 этого представления, действуя на первой из них левым сдвигом на кватернион b , а на второй — скалярным оператором b_0E , $b_0 \in \mathbb{R}$. Предположим, что $B \in \mathbf{O}(V)$. Тогда $|b| = |b_0| = 1$. Оператор B действует на факторе $V/G^0 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_0$ линейным преобразованием $(d; \lambda) \rightarrow (d; b_0b\bar{\lambda})$: если $(z; z_0) \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}_0$ — некоторый вектор, то $B(z; z_0) = (bz; b_0z_0)$, причём $|bz|^2 - |b_0z_0|^2 = |z|^2 - |z_0|^2$ и $(bz)(b_0z_0)\overline{(bz)} = b_0 \cdot b(zz_0\bar{z})\bar{b}$.

Случай 3). $l = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$.

Пространство V можно отождествить с пространством $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, в котором скалярное умножение имеет вид $(A_1, A_2) = \text{tr}(A_1 A_2^T)$, а группа \mathbf{SO}_3 действует по формуле $C: A \rightarrow AC^{-1}$. Ассоциативная алгебра эндоморфизмов представления $G^0: V$ канонически отождествляется с ассоциативной алгеброй $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, действующей на пространстве $V = \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ умножениями слева. Оператор $B \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ в пространстве V ортогонален тогда и только тогда, когда $BB^T = E$, $B \in \mathbf{O}_3$.

Далее для доказательства теоремы 1.4 понадобится следующая более общая конструкция.

Пусть W — конечномерное евклидово (соотв. эрмитово) пространство над полем \mathbb{F} , равным \mathbb{R} (соотв. \mathbb{C}), а $A^* \in \text{End}(W)$ — оператор, сопряжённый произвольному оператору $A \in \text{End}(W)$. В пространстве $\text{End}(W)$ над полем \mathbb{F} все самосопряжённые операторы образуют вещественное подпространство $S \subset \text{End}(W)$. В этом пространстве рассмотрим подмножество S_+ всех неотрицательно определённых самосопряжённых операторов, а в пространстве $\text{End}(W) \oplus \mathbb{F}$ — замкнутое подмножество $M := \{(D; \lambda) \in S_+ \times \mathbb{F} : \det D = |\lambda|^2\}$.

В группе Ли $\mathbf{GL}(W)$ над полем \mathbb{F} все линейные операторы, сохраняющие скалярные произведения, образуют компактную вещественную подгруппу Ли $\mathbf{O}(W) := \{C \in \text{End}(W) : CC^* = E\} \subset \mathbf{GL}(W)$. Компактная подгруппа Ли $\mathbf{SO}(W) := \mathbf{O}(W) \cap \mathbf{SL}(W)$ действует линейно в пространстве $\text{End}(W)$ по формуле

$$\mathbf{SO}(W) : \text{End}(W), C : A \rightarrow AC^{-1}. \quad (5.1)$$

Для всякого $B \in \text{End}(W)$ оператор $\text{End}(W) \rightarrow \text{End}(W), A \rightarrow BA$ перестановочен с действием (5.1).

Сформулируем теорему, являющуюся обобщением теоремы 1.4 в случае 3).

Теорема 5.1. *Фактор действия (5.1) диффеоморфен векторному пространству, причём на нём действует линейно любой оператор*

$$\text{End}(W) \rightarrow \text{End}(W), A \rightarrow BA, \quad (5.2)$$

где $B \in \mathbf{O}(W)$.

Следующее утверждение является известным.

Утверждение 5.2. *Отображение $\pi : \text{End}(W) \rightarrow S \oplus \mathbb{F}, A \rightarrow (AA^*; \det A)$ постоянно на орбитах действия (5.1) и разделяет их, а его образом является подмножество $M \subset S \oplus \mathbb{F}$.*

Очевидно, что вещественное пространство S содержит прямую $\mathbb{R}E$.

Лемма 5.1. *Отображение $\varphi : M \rightarrow (S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}, (D; \lambda) \rightarrow (D + \mathbb{R}E; \lambda)$ биективно.*

□ Прообраз вектора $(D + \mathbb{R}E; \lambda) \in (S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}$, где $D \in S, \lambda \in \mathbb{F}$, под действием φ совпадает с подмножеством $\{(tE + D; \lambda) : t \in \mathbb{R}, tE + D \in S_+, \det(tE + D) = |\lambda|^2\} \subset M$.

Требуется доказать, что для любого оператора $D \in S$ и числа $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ существует единственное вещественное число t , удовлетворяющее условиям $tE + D \in S_+$ и $\det(tE + D) = d$.

Оператор D в некотором ортонормированном базисе пространства W записывается матрицей $\text{diag}(d_1, \dots, d_k)$, где $k := \dim_{\mathbb{F}} W, d_i \in \mathbb{R}$. Если $t \in \mathbb{R}$, то $tE + D \in S_+ \Leftrightarrow \forall i \ t + d_i \geq 0$, а также $\det(tE + D) = \prod_{i=1}^k (t + d_i)$. Осталось применить утверждение 5.1. ■

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 5.1.

Прежде всего, фактор действия (5.1) диффеоморфен векторному пространству $(S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}$, причём факторизацию можно задать формулой $\pi': \text{End}(W) \rightarrow (S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}$, $A \rightarrow (AA^* + \mathbb{R}E; \det A)$. Чтобы это доказать, достаточно воспользоваться утверждением 5.2 и леммой 5.1, после чего положить $\pi' := \varphi \circ \pi$.

Пусть теперь $B \in \mathbf{O}(W)$. Если $A \in \text{End}(W)$, то $BA(BA)^* = B(AA^*)B^*$, $\det(BA) = (\det B)(\det A)$. Линейный оператор $S \rightarrow S$, $D \rightarrow BDB^* = BDB^{-1}$ переводит в себя матрицу E и прямую $\mathbb{R}E$. Следовательно, оператор (5.2) действует линейно на факторе действия (5.1), диффеоморфном $(S/(\mathbb{R}E)) \oplus \mathbb{F}$.

Таким образом, нами доказана теорема 5.1 и вместе с ней теорема 1.4.

5.2. Доказательство теоремы 1.5

Предположим, что группа G изоморфна одной из групп \mathbf{SU}_2 и \mathbf{SO}_3 , фактор её действия $G: V$ является гладким многообразием, а представление $\mathfrak{g}: V_0^\perp$ есть прямая сумма неприводимых представлений $\mathfrak{g}: V_1$ и $\mathfrak{g}: V_2$ размерностей 5 и 4 соответственно. Поскольку все неприводимые представления группы \mathbf{SO}_3 имеют нечётную размерность, группа G на самом деле изоморфна \mathbf{SU}_2 . Согласно лемме 3.1, найдётся вектор $v \in V_1$ с нетривиальным конечным стабилизатором. В силу леммы 2.5, пересечение $G_v \cap \Omega$ содержит некоторый нетривиальный элемент $g \in G$. Кроме того, $\mathfrak{g}v \subset V_1$, $V_2 \subset N_v$, откуда $\dim((E - g)V_2) \leq \dim((E - g)N_v) = \omega(g) \leq 2$. С другой стороны, если отождествить группу \mathbf{SU}_2 с группой $\{\lambda \in \mathbb{H}: |\lambda| = 1\}$, то $g \neq 1$, $\mathbb{H}(1 - g^{-1}) = \mathbb{H}$, $(E - g)V_2 = V_2$, что противоречит неравенству $\dim((E - g)V_2) \leq 2$.

Теорема 1.5 доказана.

5.3. Доказательство теоремы 1.6

Можно считать, что подпространство V_0 тривиально, поскольку группа $G = G^0$ действует на нём тождественно.

Итак, $G: V$ — неприводимое представление размерности $n_1 = 7$. Оно совпадает с представлением $\mathbf{SO}_3: V_{\mathbb{R}}(7)$, а его проективизация непрерывно отождествляется с тавтологическим действием $\mathbf{SO}_3: SP^3(\mathbb{R}P^2)$. Исходя из этого, опишем фактор проективного действия $\mathbf{SO}_3: PV_{\mathbb{R}}(7)$.

Топологическое пространство $SP^3(\mathbb{R}P^2)$ удобно понимать как фактор декартова куба единичной сферы евклидова пространства \mathbb{R}^3 по действию конечной группы H , порождённой всевозможными перестановками векторов и сменами их знаков. Действие $H: (S^2)^3$ перестановочно с тавтологическим действием $\mathbf{O}_3: (S^2)^3$. Кроме того, $\mathbf{O}_3 = \mathbf{SO}_3 \times \{\pm E\}$, а оператор $(-E)$ действует на $(S^2)^3$ так же, как и элемент группы H , меняющий знаки всех трёх векторов. Следовательно, фактор пространства $SP^3(\mathbb{R}P^2)$ по действию \mathbf{SO}_3 гомеоморфен фактору индуцированного действия группы H на фак-

торе $(S^2)^3/\mathbf{O}_3$. Отображение факторизации $(S^2)^3 \twoheadrightarrow (S^2)^3/\mathbf{O}_3$ задаётся формулой

$$\rho: (S^2)^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (v_1; v_2; v_3) \rightarrow ((v_2, v_3); (v_3, v_1); (v_1, v_2)), \quad (5.3)$$

причём

$$D := \rho((S^2)^3) = \{x \in \mathbb{R}^3: A(x) \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3, \quad A(x) := \begin{pmatrix} 1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 1 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

При перестановке векторов v_1, v_2, v_3 их попарные скалярные произведения также переставляются, а при смене знака одного из этих векторов два попарных скалярных произведения меняют знак, а третье остаётся прежним. Значит, индуцированное действие группы H на $(S^2)^3/\mathbf{O}_3 \cong D$ совпадает с ограничением действия $H': \mathbb{R}^3$ линейной группы H' , порождённой всевозможными перестановками координат и сменами их знаков в чётном количестве, на инвариантное подмножество $D \subset \mathbb{R}^3$. Другими словами, H' — конечная группа отражений, соответствующая системе корней $\Delta := \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j: i \neq j\}$, где $\{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3\}$ — стандартный базис в \mathbb{R}^3 .

Подмножество $C := \{x \in \mathbb{R}^3: x_1 \geq x_2 \geq |x_3|\} \subset \mathbb{R}^3$ является камерой Вейля, отвечающей системе простых корней $\{\varepsilon_1 - \varepsilon_2; \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \varepsilon_2 + \varepsilon_3\} \subset \Delta$, и потому пересекает каждую орбиту действия $H': \mathbb{R}^3$ ровно в одной точке. Следовательно, фактор D/H' гомеоморфен $M := C \cap D \subset \mathbb{R}^3$, откуда $(SP^3(\mathbb{RP}^2))/\mathbf{SO}_3 \cong ((S^2)^3/\mathbf{O}_3)/H \cong M$.

Отображения факторизации $\rho: (S^2)^3 \twoheadrightarrow (S^2)^3/\mathbf{O}_3 \cong D$, $\theta: D \twoheadrightarrow D/H' \cong M$, $\theta': (S^2)^3 \twoheadrightarrow (S^2)^3/H \cong SP^3(\mathbb{RP}^2)$ и $\rho': SP^3(\mathbb{RP}^2) \twoheadrightarrow (SP^3(\mathbb{RP}^2))/\mathbf{SO}_3 \cong M$ удовлетворяют равенству $\rho' \circ \theta' \equiv \theta \circ \rho$, то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (S^2)^3 & \xrightarrow{\rho} & D \\ \downarrow \theta' & & \downarrow \theta \\ SP^3(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{\rho'} & M \end{array} \quad (5.5)$$

коммутативна.

Из определений подмножеств C и D вытекает замкнутость и выпуклость каждого из них, а значит, и их пересечения M . Поскольку камера C соответствует системе положительных корней $\{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j: i \neq j\} \subset \Delta$, подмножество M задаётся системой неравенств

$$x_i + x_j \geq 0, \quad x_i - x_j \geq 0 \quad (i > j); \quad (5.6)$$

$$1 + x_i \geq 0, \quad 1 - x_i \geq 0; \quad (5.7)$$

$$\delta(x) \geq 0, \quad \delta(x) := \det A(x). \quad (5.8)$$

Докажем, что точка x множества M принадлежит его границе тогда и только тогда, когда в ней по крайней мере одно из неравенств (5.6), (5.7) и (5.8) обращается

в равенство. Достаточно доказать утверждение «тогда», так как в левых частях этих неравенств стоят непрерывные функции. Если $x \in \text{Int } M$, то в точке x все линейные неравенства (5.6) и (5.7) являются строгими, в частности, $1 > x_1 > x_2 > \pm x_3$, $1 > x_1 > x_2 > |x_3| \geq 0$, $x_1 > x_2|x_3| = |x_2x_3| \geq x_2x_3$, $\frac{\partial \delta}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1x_2x_3 + 1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) = 2(x_2x_3 - x_1) < 0$, $\nabla_x \delta \neq 0$, вследствие чего неравенство (5.8) оказывается строгим в точке x .

Допустим, что в точке $x \in M$ одно из неравенств (5.7) обращается в равенство. Тогда в этой точке обращается в равенство по крайней мере одно из неравенств (5.6). Действительно, если $x \in M$, $x_i = \pm 1$ и $\{i; j; k\} = \{1; 2; 3\}$, то $0 \leq \delta(x) = 2x_ix_jx_k + 1 - (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2) = \pm 2x_jx_k - x_j^2 - x_k^2 = -(x_j \mp x_k)^2$, $(x_j \mp x_k)^2 \leq 0$, $x_j \mp x_k = 0$.

Таким образом, фактор $(SP^3(\mathbb{RP}^2))/\mathbf{SO}_3$ гомеоморфен выпуклому компакт $M = C \cap D \subset \mathbb{R}^3$, задаваемому неравенствами (5.6), (5.7) и (5.8), причём ∂M есть подмножество всех векторов из M , в которых по крайней мере одно из неравенств (5.6) и (5.8) обращается в равенство:

$$\partial M = \{x \in M : (x_1^2 - x_2^2)(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) \det A(x) = 0\}. \quad (5.9)$$

Вернёмся к исходному представлению $G: V$.

Для всякого подмножества $U \subset V$, замкнутого относительно умножения на числа из \mathbb{R}^* , будем обозначать через $PU \subset PV$ множество прямых пространства V , содержащихся в $U \cup \{0\}$.

Положим $U := \{v \in V : -v \notin Gv\} \subset V$, $F := V \setminus U = \{v \in V : -v \in Gv\} \subset V$.

Очевидно, что $GU = \mathbb{R}^*U = U$ и $GF = \mathbb{R}^*F = F$. Группа G при действии на единичной сфере $S \subset V$ переводит в себя подмножества $S \cap U$ и $S \cap F$, а при проективном действии на PV — подмножества PU и PF , причём $S = (S \cap U) \sqcup (S \cap F)$, $S/G = (S \cap U)/G \sqcup (S \cap F)/G$, $PV = PU \sqcup PF$, $PV/G = PU/G \sqcup PF/G$. Двухлистное накрытие $S \rightarrow PV$, $v \rightarrow \mathbb{R}v$ перестановочно с действием группы G . Индуцированное отображение $S/G \rightarrow PV/G$ при ограничении на $(S \cap F)/G$ даёт гомеоморфизм $(S \cap F)/G \rightarrow PF/G$, а при ограничении на $(S \cap U)/G$ — двухлистное накрытие $(S \cap U)/G \rightarrow PU/G$.

В группе \mathbf{SU}_2 каждый класс сопряжённости имеет непустое пересечение с подгруппой $\mathbb{T} := \{\text{diag}(\lambda; \bar{\lambda}) : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\} \subset \mathbf{SU}_2$. Поэтому $F = GF'$, где $F' := \{v \in V : -v \in \mathbb{T}v\} \subset V$. Кроме того, $\mathbb{R}^*F' = F'$, $PF = G(PF')$.

Многочлен $f = \sum_{|k| \leq 3} c_k x^{3+k} y^{3-k} \in V_{\mathbb{R}}(7)$ принадлежит подмножеству F' тогда

и только тогда, когда найдётся число $\lambda \in \mathbb{C}$ с модулем 1, такое что $(\lambda^{2k} + 1)c_k = 0$ для всех k , $|k| \leq 3$. Последнее, в свою очередь, эквивалентно тому, что все числа k , удовлетворяющие условиям $|k| \leq 3$ и $c_k \neq 0$, отличны от нуля и включают в своё разложение на простые множители число 2 с одной и той же кратностью, то есть что многочлен f принадлежит объединению комплексных подпространств $W_1 := \langle x^{3+k} y^{3-k} : |k| \in \{1; 3\} \rangle_{\mathbb{C}}$ и $W_2 := \langle x^{3+k} y^{3-k} : |k| = 2 \rangle_{\mathbb{C}}$ пространства $V(7)$.

Итак, $F' = (W_1 \cup W_2) \cap V_{\mathbb{R}}(7) = F'_1 \cup F'_2$, где $F'_i := W_i \cap V_{\mathbb{R}}(7)$. Далее, $PF' = PF'_1 \cup PF'_2$,

$$PF = G(PF') = G(PF'_1) \cup G(PF'_2). \quad (5.10)$$

Теперь опишем PF , PF' , PF'_i и $G(PF'_i)$ ($i = 1, 2$) как подмножества топологического пространства $SP^3(\mathbb{RP}^2)$ с учётом гомеоморфизма \mathbf{SO}_3 -пространств PV и $SP^3(\mathbb{RP}^2)$. Очевидно, что равенство (5.10) переносится с пространства PV на $SP^3(\mathbb{RP}^2)$.

Многочлен $f \in V_{\mathbb{R}}(7)$ принадлежит $W_1 = \langle x^6; x^4y^2; x^2y^4; y^6 \rangle_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда его разложение на линейные множители вместе с любым множителем $ax + by$ включает в себя и $ax - by$ — что равносильно, соответствующая неупорядоченная тройка прямых в \mathbb{R}^3 переходит в себя при повороте на угол π вокруг вертикальной прямой. Следовательно, $PF'_1 \subset SP^3(\mathbb{RP}^2)$ — подмножество всех неупорядоченных троек прямых, переходящих в себя при повороте на угол π вокруг вертикальной прямой, а $G(PF'_1) \subset SP^3(\mathbb{RP}^2)$ — подмножество всех неупорядоченных троек прямых, переходящих в себя при повороте на угол π вокруг некоторой прямой.

Многочлен $f = \sum_{|k| \leq 3} c_k x^{3+k} y^{3-k} \in V_{\mathbb{R}}(7)$ принадлежит $W_2 = \langle x^5y; xy^5 \rangle_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда

$$f = c_2 x^5 y + c_{-2} x y^5 = xy(c_2 x^4 + c_{-2} y^4) = xy(c_2 x^4 + \overline{c_2} y^4) = xy(ax + by)(ax + iby)(ax - by)(ax - iby), \quad (5.11)$$

причём $a^4 = c_2$, $b^4 = -\overline{c_2}$, $|a| = |b|$. Пользуясь разложением (5.11) многочлена f на линейные множители, получаем, что $PF'_2 \subset SP^3(\mathbb{RP}^2)$ — подмножество всех неупорядоченных троек прямых, одна из которых вертикальна, а две другие горизонтальны и ортогональны друг другу, то есть всех неупорядоченных троек попарно ортогональных прямых, одна из которых вертикальна. В свою очередь, $G(PF'_2) \subset SP^3(\mathbb{RP}^2)$ — подмножество всех неупорядоченных троек попарно ортогональных прямых.

Согласно (5.10), подмножество $PF \subset SP^3(\mathbb{RP}^2)$ состоит в точности из всех неупорядоченных троек прямых, переходящих в себя при повороте на угол π вокруг некоторой прямой либо включающих в себя три попарно ортогональные прямые.

Докажем, что тройка прямых в \mathbb{R}^3 принадлежит PF тогда и только тогда, когда либо все три прямые лежат в одной плоскости, либо из трёх попарных углов между ними найдутся два равных.

Если все три прямые лежат в одной плоскости, то при повороте на угол π вокруг прямой, ортогональной этой плоскости, каждая из них переходит в себя. Если два из трёх попарных углов между ними равны, то можно выбрать на каждой прямой по вектору единичной длины, так чтобы выбранные векторы v_1, v_2, v_3 удовлетворяли равенству $(v_1, v_3) = (v_2, v_3)$. Тогда подпространство всех векторов, ортогональных векторам $v_1 + v_2$ и v_3 , нетривиально и содержит вектор $v_1 - v_2$, а значит, и некоторую прямую, проходящую через $v_1 - v_2$. Пусть R — поворот на угол π вокруг этой прямой. Ясно, что $R(v_1 - v_2) = v_1 - v_2$, $R(v_1 + v_2) = -(v_1 + v_2)$, $Rv_3 = -v_3$, $Rv_1 = -v_2$, $Rv_2 = -v_1$, $R(\mathbb{R}v_1) = \mathbb{R}v_2$, $R(\mathbb{R}v_2) = \mathbb{R}v_1$, $R(\mathbb{R}v_3) = \mathbb{R}v_3$.

Обратно, предположим, что все три попарных угла между прямыми $\mathbb{R}v_1, \mathbb{R}v_2, \mathbb{R}v_3$, где $v_i \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, различны. Тогда одна из прямых $\mathbb{R}v_i$ неортогональна двум другим. Можно считать, что

$$(v_1, v_3) \neq 0; \quad (v_2, v_3) \neq 0. \quad (5.12)$$

В частности, указанные три прямые не могут быть попарно ортогональными. Допустим, что ортогональный нескаларный оператор R переводит в себя их неупорядоченную тройку. Он сохраняет углы между прямыми, откуда $R(\mathbb{R}v_i) = \mathbb{R}v_i$, $Rv_i = \lambda_i v_i$, $\lambda_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, 3$). Согласно (5.12), $\lambda_1 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то есть ограничение оператора R на линейную оболочку векторов v_1, v_2, v_3 есть скалярный оператор. Следовательно, прямые $\mathbb{R}v_i$ ($i = 1, 2, 3$) лежат в одной плоскости.

Итак, $PF \subset SP^3(\mathbb{RP}^2)$ — подмножество всех неупорядоченных троек прямых, лежащих в одной плоскости либо образующих три попарных угла, среди которых найдутся два равных. Теперь, пользуясь коммутативной диаграммой (5.5), найдём образ этого подмножества при отображении факторизации $\rho': SP^3(\mathbb{RP}^2) \rightarrow M$. Легко видеть, что $(\theta')^{-1}(PF) \subset (S^2)^3$ есть подмножество всех упорядоченных троек векторов $v_1, v_2, v_3 \in S^2$, линейно зависящих либо удовлетворяющих равенству $((v_1, v_2)^2 - (v_2, v_3)^2)((v_2, v_3)^2 - (v_3, v_1)^2)((v_3, v_1)^2 - (v_1, v_2)^2) = 0$. Далее,

$$\rho((\theta')^{-1}(PF)) = \{x \in D: (x_1^2 - x_2^2)(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) \det A(x) = 0\} \subset D.$$

Учитывая равенство $M = C \cap D$ и формулу (5.9), получаем, что $\rho((\theta')^{-1}(PF)) \cap C = \partial M$. Образ H' -инвариантного подмножества $\rho((\theta')^{-1}(PF))$ при отображении $\theta: D \rightarrow D/H' \cong M$ совпадает с $\rho((\theta')^{-1}(PF)) \cap C = \partial M$. Поэтому $\rho'(PF) = \rho' \circ \theta'((\theta')^{-1}(PF)) = \theta \circ \rho((\theta')^{-1}(PF)) = \partial M$.

Из вышеизложенного можно заключить, что существует гомеоморфизм $PV/G \rightarrow M$, переводящий подмножества PF/G и PU/G соответственно в ∂M и $\text{Int } M$. Подмножество $\text{Int } M \subset \mathbb{R}^3$ выпукло как внутренность выпуклого подмножества $M \subset \mathbb{R}^3$, а значит, односвязно. Гомеоморфное ему подмножество $PU/G \subset PV/G$ также односвязно. Напомним, что отображение $S/G \rightarrow PV/G$, $Gv \rightarrow G(\mathbb{R}v)$ при ограничении на $(S \cap F)/G$ даёт гомеоморфизм $(S \cap F)/G \rightarrow PF/G$, а при ограничении на $(S \cap U)/G$ — двулистное накрытие $(S \cap U)/G \rightarrow PU/G$. Данное накрытие тривиально, поскольку его база PU/G односвязна. Отсюда фактор S/G гомеоморфен топологическому пространству $(M \times \{\pm 1\}) / \{(x; 1) \sim (x; -1) : x \in \partial M\}$. Кроме того, имеется гомеоморфизм из трёхмерного замкнутого шара в подмножество $M \subset \mathbb{R}^3$, переводящий граничную сферу в ∂M . Следовательно, фактор сферы S по действию G гомеоморфен несвязному объединению двух экземпляров трёхмерного замкнутого шара с отождествлением двух экземпляров каждой граничной точки. Таким образом, $S/G \cong S^3$, и $V/G \cong \mathbb{R}^4$.

Теорема 1.6 доказана.

5.4. Доказательство теоремы 1.7

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, можно считать, что $V_0 = 0$, и $G: V$ — неприводимое представление размерности $n_1 = 8$.

Поскольку все неприводимые представления группы \mathbf{SO}_3 имеют нечётную размерность, группа G изоморфна \mathbf{SU}_2 , а представление $G: V$ совпадает с представлением $\mathbf{SU}_2: V(4)$ (см. §3).

Достаточно доказать, что фактор единичной сферы $S \subset V$ по действию G гомеоморфен S^4 .

Будем обозначать через S^3 единичную сферу эрмитова пространства $\mathbb{C}^2 = \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{C})$ со скалярным произведением $(v_1, v_2) := v_1^* v_2$. Группа $G \cong \mathbf{SU}_2$ действует на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ и S^3 как на инвариантных подмножествах для её тавтологического представления в пространстве \mathbb{C}^2 .

Непрерывное отображение $\pi: (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^3 \rightarrow V \setminus \{0\}$, определённое по формуле $(\pi(v_1; v_2; v_3))(v) := \prod_{j=1}^3 (v_j, v)$ ($v \in \mathbb{C}^2$), перестановочно с действием G . Данное отображение

сюръективно, а его слои суть орбиты действия на $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^3$ группы H_0 всех преобразований $(v_1; v_2; v_3) \rightarrow (\lambda_1 v_{\sigma(1)}; \lambda_2 v_{\sigma(2)}; \lambda_3 v_{\sigma(3)})$, где $\sigma \in S_3$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$: каждый многочлен из $V(4) \setminus \{0\}$ разлагается на линейные множители единственным образом с точностью до их перестановки и умножения на комплексные числа с произведением 1.

Непрерывная функция $r: (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^3 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $(v_1; v_2; v_3) \rightarrow \prod_{j=1}^3 \|v_j\|$ постоянна на орбитах действий групп H_0 и G на $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^3$. Поэтому существует непрерывная функция $r': V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, постоянная на орбитах действия $G: (V \setminus \{0\})$, такая что $r' \circ \pi \equiv r$. Имеем $r(\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3) = \left(\prod_{j=1}^3 |\lambda_j| \right) r(v_1; v_2; v_3)$ и $\pi(\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3) = \left(\prod_{j=1}^3 \overline{\lambda_j} \right) \pi(v_1; v_2; v_3)$, где $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ и $v_j \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, откуда $r'(\lambda f) = |\lambda| r'(f)$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}^*$ и $f \in V \setminus \{0\}$. Значит, G -инвариантное подмножество $S' := (r')^{-1}(1) \subset V \setminus \{0\}$ пересекает каждое подмножество $(\mathbb{R}_{>0})v$, $v \in V \setminus \{0\}$, ровно в одной точке, а расслоение $V \setminus \{0\} \twoheadrightarrow S$, $v \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ при ограничении на S' даёт гомеоморфизм G -пространств S' и S .

Следовательно, $S/G \cong S'/G$, и задача свелась к доказательству соотношения $S'/G \cong S^4$.

Заметим, что $\pi^{-1}(S') = r^{-1}(1) = H_0((S^3)^3)$, $S' = \pi(H_0((S^3)^3)) = \pi((S^3)^3)$. Слои отображения $\pi|_{(S^3)^3}$ суть пересечения орбит действия $H_0: (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^3$ с подмножеством $(S^3)^3$, то есть орбиты действия на $(S^3)^3$ группы всех преобразований $(v_1; v_2; v_3) \rightarrow (\lambda_1 v_{\sigma(1)}; \lambda_2 v_{\sigma(2)}; \lambda_3 v_{\sigma(3)})$, где $\sigma \in S_3$, $\lambda_j \in \mathbb{T}$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Что же касается композиции $(S^3)^3 \twoheadrightarrow S' \twoheadrightarrow S'/G$ отображения $\pi|_{(S^3)^3}: (S^3)^3 \twoheadrightarrow S'$ и отображения факторизации

$S' \twoheadrightarrow S'/G$, то её слои суть орбиты действия на $(S^3)^3$ группы H всех преобразований

$$(v_1; v_2; v_3) \rightarrow (\lambda_1 g v_{\sigma(1)}; \lambda_2 g v_{\sigma(2)}; \lambda_3 g v_{\sigma(3)}), \quad \sigma \in S_3, g \in \mathbf{SU}_2, \lambda_j \in \mathbb{T}, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad (5.13)$$

откуда $S'/G \cong (S^3)^3/H$. Теперь осталось доказать, что $(S^3)^3/H \cong S^4$.

Канонический гомоморфизм $\mathbf{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathbf{SO}_3$ и тавтологическое действие $\mathbf{SO}_3: S^2$ определяют действие $H: (S^2)^3$, при котором элемент (5.13) переводит точку $(v_1; v_2; v_3)$, где $v_j \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, в точку $(g v_{\sigma(1)}; g v_{\sigma(2)}; g v_{\sigma(3)})$. Композиция отображения $S^3 \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^1$, $v \rightarrow \mathbb{C}v$ и стереографической проекции $\mathbb{CP}^1 \rightarrow S^2$ (известная как расслоение Хопфа $S^3 \twoheadrightarrow S^2$) индуцирует отображение $\theta': (S^3)^3 \twoheadrightarrow (S^2)^3$, перестановочное с действием H .

Фактор действия $H: (S^2)^3$ гомеоморфен фактору тавтологического действия $\mathbf{SO}_3: SP^3(S^2)$. Напомним, что фактор тавтологического действия $\mathbf{O}_3: (S^2)^3$ гомеоморфен выпуклому компактному подмножеству $D \subset \mathbb{R}^3$, определённого в (5.4), причём отображение факторизации $\rho: (S^2)^3 \twoheadrightarrow (S^2)^3/\mathbf{O}_3 \cong D$ задаётся формулой (5.3). Фактор тавтологического действия $\mathbf{O}_3: SP^3(S^2)$ гомеоморфен фактору ограничения действия линейной группы всевозможных перестановок координат в \mathbb{R}^3 на инвариантное подмножество $D \subset \mathbb{R}^3$, то есть выпуклому компактному $M := \{x \in D: x_1 \geq x_2 \geq x_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

Орбита действия $\mathbf{O}_3: SP^3(S^2)$, содержащая неупорядоченную тройку векторов $v_1, v_2, v_3 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, есть объединение орбит неупорядоченных троек $(v_1; v_2; v_3)$ и $(-v_1; -v_2; -v_3)$ для действия $\mathbf{SO}_3: SP^3(S^2)$. Эти орбиты совпадают тогда и только тогда, когда либо векторы v_1, v_2, v_3 лежат в одной плоскости, либо из трёх попарных углов между ними найдутся два равных. Следовательно, прообраз точки $x \in M \subset \mathbb{R}^3$ при естественном отображении $(SP^3(S^2))/\mathbf{SO}_3 \twoheadrightarrow (SP^3(S^2))/\mathbf{O}_3 \cong M$ состоит из одной точки, если $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \det A(x) = 0$ (что равносильно, $x \in \partial M$), и из двух точек в противном случае. Значит, указанное отображение при ограничении на прообраз ∂M даёт гомеоморфизм, а при ограничении на прообраз $\text{Int } M$ — двулистное накрытие. Данное накрытие тривиально, поскольку его база $\text{Int } M$ односвязна. Отсюда

$$(SP^3(S^2))/\mathbf{SO}_3 \cong \widehat{M} := (M \times \{\pm 1\}) / \{(x; 1) \sim (x; -1): x \in \partial M\},$$

и

$$(S^2)^3/H \cong (SP^3(S^2))/\mathbf{SO}_3 \cong \widehat{M}. \quad (5.14)$$

Можно рассматривать ∂M как подмножество пространства \widehat{M} : в последнем два экземпляра границы ∂M склеены в один.

Пусть $\widehat{\rho}: (S^2)^3 \twoheadrightarrow (S^2)^3/H \cong \widehat{M}$ — отображение факторизации. Отображение $\theta: (S^3)^3 \twoheadrightarrow \widehat{M}$, равное $\widehat{\rho} \circ \theta'$, постоянно на орбитах действия $H: (S^3)^3$, и, более того,

$$\forall p \in (S^3)^3 \quad \theta^{-1}(\theta(p)) = (\theta')^{-1}(H\theta'(p)) = (\theta')^{-1}(\theta'(Hp)), \quad (5.15)$$

так как θ' есть отображение H -пространств $(S^3)^3$ и $(S^2)^3$. Кроме того,

$$\forall p = (v_1; v_2; v_3) \in (S^3)^3 \quad (\theta')^{-1}(\theta'(p)) = \{(\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3) : \lambda_j \in \mathbb{T}\}, \quad (5.16)$$

$$\forall p = (v_1; v_2; v_3) \in (S^3)^3 \quad \theta^{-1}(\theta(p)) = \{(\lambda_1 g v_{\sigma(1)}; \lambda_2 g v_{\sigma(2)}; \lambda_3 g v_{\sigma(3)}) : \sigma \in S_3, g \in \mathbf{SU}_2, \lambda_j \in \mathbb{T}\}. \quad (5.17)$$

Векторам $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2 = \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{C})$ сопоставим матрицу $(v_1 | v_2) \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ и число $|v_1, v_2| := \det(v_1 | v_2) \in \mathbb{C}$.

Для непрерывных функций $\theta'_j, \theta_j : (S^3)^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, 2$), определённых формулами

$$\begin{aligned} \theta'_1(v_1; v_2; v_3) &:= (v_3, v_1)|v_3, v_2| + (v_3, v_2)|v_3, v_1|; \\ \theta'_2(v_1; v_2; v_3) &:= |v_1, v_2|^2; \\ \theta_j(v_1; v_2; v_3) &:= \theta'_j(v_1; v_2; v_3) \cdot \theta'_j(v_2; v_3; v_1) \cdot \theta'_j(v_3; v_1; v_2) \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

имеем $\theta'_j(v_1; v_2; v_3) = \theta'_j(v_2; v_1; v_3)$ ($v_1, v_2, v_3 \in S^3, j = 1, 2$),

$$\forall j = 1, 2 \quad \forall p = (v_1; v_2; v_3) \in (S^3)^3 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{T} \quad \theta_j(\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2j} \theta_j(p), \quad (5.18)$$

и поэтому функции θ_1 и θ_2 постоянны на орбитах действия $H : (S^3)^3$.

Выясним, как устроены подмножества $\theta_1^{-1}(0), \theta_2^{-1}(0) \subset (S^3)^3$.

Пусть $I'_1, I''_1, I_2 \subset \partial M \subset \widehat{M}$ — образы непрерывных инъективных отображений

$$\begin{aligned} \gamma'_1 : \quad & [-1; -\frac{1}{2}] \rightarrow \partial M, \quad t \rightarrow (2t^2 - 1; t; t), \\ \gamma''_1 : \quad & [-\frac{1}{2}; 1] \rightarrow \partial M, \quad t \rightarrow (t; t; 2t^2 - 1), \\ \gamma_2 : \quad & [-1; 1] \rightarrow \partial M, \quad t \rightarrow (1; t; t) \end{aligned}$$

соответственно, и $I_1 := I'_1 \cup I''_1 \subset \partial M \subset \widehat{M}$.

Предложение 5.1. *Справедливы равенства $\theta_j^{-1}(0) = \theta^{-1}(I_j)$ ($j = 1, 2$).*

□ Очевидно, что $\theta_2^{-1}(0) \subset (S^3)^3$ есть подмножество всех троек векторов из $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, среди которых найдутся два пропорциональных, то есть прообраз под действием θ' подмножества всех троек векторов двумерной сферы S^2 , по крайней мере два из которых равны. Указанное подмножество в $(S^2)^3$ совпадает с $(\widehat{\rho})^{-1}(I_2)$.

Далее, для точки $p = (v_1; v_2; v_3) \in (S^3)^3$ равенство $\theta'_1(p) = 0$ эквивалентно тому, что $\theta'(p) \in (S^2)^3$ есть тройка векторов, первые два из которых симметричны относительно прямой, натянутой на третий. Доказательство этого факта сводится к случаю $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

при помощи оператора из \mathbf{SU}_2 , переводящего вектор v_3 в вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (такой оператор

существует). Если же $v_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}$ ($j = 1, 2, 3$), $a_3 = 1$, $b_3 = 0$, то $\theta'_1(p) = a_1b_2 + a_2b_1$, что влечёт требуемое.

Значит, подмножество $\theta_1^{-1}(0) \subset (S^3)^3$ совпадает с прообразом под действием θ' подмножества всех троек векторов сферы S^2 , какие-либо два из которых симметричны относительно прямой, натянутой на третий. Данное подмножество в $(S^2)^3$ и есть $(\widehat{\rho})^{-1}(I_1)$.

Осталось воспользоваться соотношением $\theta = \widehat{\rho} \circ \theta'$ и получить нужные равенства. (Всюду при доказательстве использовался гомеоморфизм (5.14).) ■

Из определений подмножеств $I'_1, I''_1, I_2 \subset \partial M$ вытекает, что указанные подмножества гомеоморфны отрезку, причём $I'_1 \cap I''_1 = \left\{(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})\right\}$, $I'_1 \cap I_2 = \{(1; -1; -1)\}$ и $I''_1 \cap I_2 = \{(1; 1; 1)\}$. Следовательно, $I_1 \cong I_2 \cong [0; 1]$ и $I_1 \cap I_2 = \{(1; 1; 1); (1; -1; -1)\}$. Существует гомеоморфизм из подмножества $M \subset \mathbb{R}^3$ в единичный замкнутый шар пространства \mathbb{R}^3 , переводящий ∂M в единичную сферу S^2 , а подмножества $I_{1,2} \subset \partial M$ — в полуокружности соответственно $\{y \in \mathbb{R}^3: y_2 = \pm\sqrt{1-y_1^2}, y_3 = 0\} \subset S^2$. В свою очередь, существует гомеоморфизм из пространства \widehat{M} в сферу $S^3 = \{y \in \mathbb{R}^4: (y, y) = 1\}$, переводящий подмножество ∂M в двумерную сферу $\{y \in S^3: y_4 = 0\}$, а подмножества $I_{1,2}$ — в полуокружности соответственно $\{y \in \mathbb{R}^4: y_2 = \pm\sqrt{1-y_1^2}, y_3 = y_4 = 0\}$. Этот гомеоморфизм позволяет отождествить пространство \widehat{M} со сферой S^3 , подмножества I_1 и I_2 — с полуокружностями в S^3 , задаваемыми уравнениями $y_2 = \sqrt{1-y_1^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1-y_1^2}$ соответственно, а отображение θ рассматривать как отображение $\theta: (S^3)^3 \rightarrow S^3$, удовлетворяющее условиям $\theta_j^{-1}(0) = \theta^{-1}(I_j)$ ($j = 1, 2$).

Из формул (5.17) и (5.18) можно заключить, что:

- 1) отображения $(S^3)^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $p \rightarrow |\theta_j(p)|$ ($j = 1, 2$) и $(S^3)^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $p \rightarrow (\theta_1(p))^2 \overline{(\theta_2(p))}$ постоянны на слоях θ , а значит, имеют вид соответственно $\alpha_1 \circ \theta$, $\alpha_2 \circ \theta$, $\alpha \circ \theta$ для непрерывных отображений $\alpha_1, \alpha_2: S^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ и $\alpha: S^3 \rightarrow \mathbb{C}$;
- 2) если $K \subset S^3 \times \mathbb{C}^2$ — образ непрерывного отображения $\widetilde{\theta}: (S^3)^3 \rightarrow S^3 \times \mathbb{C}^2$, $p \rightarrow (\theta(p); \theta_1(p); \theta_2(p))$, то

$$\forall p \in (S^3)^3 \quad K \cap \left(\{\theta(p)\} \times \mathbb{C}^2\right) = \left\{(\theta(p); \lambda\theta_1(p); \lambda^2\theta_2(p)): \lambda \in \mathbb{T}\right\}. \quad (5.19)$$

Лемма 5.2. Фактор $(S^3)^3/H$ гомеоморфен пространству K .

□ Отображение $\widetilde{\theta}: (S^3)^3 \rightarrow K$ постоянно на орбитах действия $H: (S^3)^3$. Осталось доказать, что оно их разделяет.

Предположим, что $p_0, p \in (S^3)^3$ и $\widetilde{\theta}(p_0) = \widetilde{\theta}(p)$, то есть $\theta(p_0) = \theta(p)$, $\theta_1(p_0) = \theta_1(p)$, $\theta_2(p_0) = \theta_2(p)$. Нужно доказать, что $p \in Hp_0$.

Будем считать, что $p_0 = (v_1; v_2; v_3)$ и $p = (\lambda_1 v_1; \lambda_2 v_2; \lambda_3 v_3)$, где $\lambda_j \in \mathbb{T}$: согласно (5.15) и (5.16), к этому можно свести заменой точек p_0 и p точками соответственно hp_0 и p для некоторого $h \in H$.

Достаточно доказать, что многочлены $\pi(p_0), \pi(p) \in S'$ принадлежат одной орбите действия $G: S'$, так как $p \in Hp_0 \Leftrightarrow \pi(p) \in G(\pi(p_0))$.

Ясно, что $\pi(p) = \bar{\lambda}_0 \pi(p_0)$, где $\lambda_0 := \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \in \mathbb{T}$. В силу (5.18), $\theta_1(p_0) = \theta_1(p) = \lambda_0^2 \theta_1(p_0)$, то есть либо $\lambda_0^2 = 1$, либо $\theta_1(p_0) = 0$.

Если $\lambda_0 = \pm 1$, то многочлен $\pi(p_0)$ переходит в $\pi(p)$ под действием элемента $\pm E \in \mathbf{SU}_2$.

Допустим, что $\theta_1(p_0) = 0$.

Поскольку группа H включает в себя всевозможные перестановки трёх векторов сферы S^3 , а тавтологическое действие $\mathbf{SU}_2: S^3$ транзитивно, можно считать, что $\theta'_1(v_1; v_2; v_3) = 0$, $v_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}$ ($j = 1, 2, 3$), $a_3 = 1$, $b_3 = 0$.

Имеем $a_1 b_2 + a_2 b_1 = \theta'_1(p_0) = 0$. Значит,

$$\theta_2(p_0) = b_1^2 b_2^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = -4 b_1^2 b_2^2 (a_1 b_2)(a_2 b_1) = -4(a_1 a_2)(b_1 b_2)^3,$$

а коэффициенты многочлена $\pi(p_0)$, расположенные в порядке убывания степени вхождения в моном первой координаты, суть $(\overline{a_1 a_2}), 0, \overline{(b_1 b_2)}, 0$. Согласно (5.18), $\theta_2(p_0) = \theta_2(p) = \lambda_0^4 \theta_2(p_0)$, $(a_1 a_2)(b_1 b_2)^3 = \lambda_0^4 (a_1 a_2)(b_1 b_2)^3$. Таким образом,

$$|a_1 a_2| = |\lambda_0 a_1 a_2|, \quad |b_1 b_2| = |\lambda_0 b_1 b_2|, \quad (a_1 a_2)(b_1 b_2)^3 = (\lambda_0 a_1 a_2)(\lambda_0 b_1 b_2)^3.$$

Следовательно, найдётся число $\lambda \in \mathbb{T}$, для которого $(\lambda_0 a_1 a_2) = \lambda^3 (a_1 a_2)$ и $(\lambda_0 b_1 b_2) = \lambda^{-1} (b_1 b_2)$. Заметим, что элемент $g := \text{diag}(\lambda; \bar{\lambda}) \in \mathbf{SU}_2$ переводит многочлен $\pi(p_0)$ в многочлен с коэффициентами $(\overline{\lambda^3 a_1 a_2}), 0, (\overline{\lambda^{-1} b_1 b_2}), 0$, то есть $g\pi(p_0) = \bar{\lambda}_0 \pi(p_0) = \pi(p)$. \blacksquare

Напомним, что требовалось доказать соотношение $(S^3)^3/H \cong S^4$. Теперь задача свелась к доказательству того, что $K \cong S^4$.

Ясно, что $I_j = \alpha_j^{-1}(0)$ ($j = 1, 2$). Рассмотрим подмножества $U_1 := S^3 \setminus I_1$, $U_2 := S^3 \setminus I_2$ и $U := U_1 \cap U_2 = \alpha^{-1}(\mathbb{C}^*)$ сферы S^3 . Подмножество $U = S^3 \setminus (I_1 \cup I_2) = \{y \in S^3: y_1^2 + y_2^2 < 1\}$ гомеоморфно декартову произведению открытого круга на окружность. Отображение $\alpha|_U: U \rightarrow \mathbb{C}^*$ индуцирует гомоморфизм $\alpha_*: \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*)$, причём $\pi_1(U) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$.

Предложение 5.2. *Гомоморфизм $\alpha_*: \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*)$ является изоморфизмом.*

□ Достаточно доказать, что образ гомоморфизма α_* содержит образующий элемент группы $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$.

Фиксируем вещественные числа a и b , такие что $a > b > 0$ и $a^2 + b^2 = 1$, и векторы $v_{1,2} := \begin{pmatrix} a \\ \pm b \end{pmatrix} \in S^3$. Для непрерывного отображения $[0; 1] \times [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow S^3$, сопоставляющего произвольным числам $t \in [0; 1]$, $\beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ вектор $v_3(\beta; t) := \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \cdot e^{2\pi i t} \end{pmatrix} \in S^3$, имеем $v_3(0; t) = v_3(0; 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($t \in [0; 1]$).

Непрерывная функция $\theta_3: (S^3)^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $(v_1; v_2; v_3) \rightarrow (\theta'_1(v_2; v_3; v_1) \cdot \theta'_1(v_3; v_1; v_2))^2 \cdot \overline{(\theta_2(v_1; v_2; v_3))}$ удовлетворяет соотношению

$$\forall p \in (S^3)^3 \quad (\alpha \circ \theta)(p) = (\theta'_1(p))^2 \theta_3(p). \quad (5.20)$$

Заметим, что $\theta'_1(v_2; v_3(0; 0); v_1) = -b(3a^2 - b^2)$, $\theta'_1(v_3(0; 0); v_1; v_2) = b(3a^2 - b^2)$, $\theta_2(v_1; v_2; v_3(0; 0)) = 4a^2b^6$, откуда $\theta_3(v_1; v_2; v_3(0; 0)) \neq 0$. Открытое подмножество $\theta_3^{-1}(\mathbb{C}^*) \subset (S^3)^3$, содержащее точку $(v_1; v_2; v_3(0; 0))$, содержит и односвязное подмножество $\left\{ (v_1; v_2; v_3(\beta; t)) : \beta \in [0; \beta_0], t \in [0; 1] \right\} \subset (S^3)^3$ для некоторого $\beta_0 \in (0; \frac{\pi}{2})$. Следовательно, петля $\gamma: [0; 1] \rightarrow (S^3)^3$, $t \rightarrow (v_1; v_2; v_3(\beta_0; t))$ стягиваема в $\theta_3^{-1}(\mathbb{C}^*)$, а значит, $(\theta_3 \circ \gamma)([0; 1]) \subset \mathbb{C}^*$ и $[\theta_3 \circ \gamma] = 0 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Кроме того, $(\theta'_1 \circ \gamma)([0; 1]) \subset \mathbb{C}^*$ и $[\theta'_1 \circ \gamma] = 1 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$, поскольку

$$\begin{aligned} \theta'_1(\gamma(t)) &= (a \cos \beta_0 + b \sin \beta_0 \cdot e^{-2\pi it})(-b \cos \beta_0 - a \sin \beta_0 \cdot e^{2\pi it}) + \\ &+ (a \cos \beta_0 - b \sin \beta_0 \cdot e^{-2\pi it})(b \cos \beta_0 - a \sin \beta_0 \cdot e^{2\pi it}) = -2 \cos \beta_0 \sin \beta_0 (a^2 e^{2\pi it} + b^2 e^{-2\pi it}) \end{aligned}$$

и $|a^2 e^{2\pi it}| > |b^2 e^{-2\pi it}|$ для $t \in [0; 1]$.

Согласно (5.20), $(\alpha \circ \theta \circ \gamma)([0; 1]) \subset \mathbb{C}^*$ и $[\alpha \circ \theta \circ \gamma] = 2[\theta'_1 \circ \gamma] + [\theta_3 \circ \gamma] = 2 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Другими словами, петля $\theta \circ \gamma: [0; 1] \rightarrow S^3$ целиком содержится в подмножестве $U \subset S^3$, а образ элемента $[\theta \circ \gamma] \in \pi_1(U)$ при гомоморфизме α_* равен $2 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$.

Пусть $g := \text{diag}(i; -i) \in \mathbf{SU}_2$. Для любого $t \in [0; \frac{1}{2}]$ имеем $gv_1 = iv_2$, $gv_2 = iv_1$, $gv_3(\beta_0; t) = iv_3(\beta_0; t + \frac{1}{2})$, и, в силу (5.17), $\theta(\gamma(t + \frac{1}{2})) = \theta(\gamma(t))$. Значит, $[\theta \circ \gamma] = 2c$, где $c \in \pi_1(U)$. Элемент c является искомым: $2\alpha_*(c) = \alpha_*(2c) = \alpha_*[\theta \circ \gamma] = 2 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$, $\alpha_*(c) = 1 \in \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. ■

Непрерывное отображение $U \rightarrow \mathbb{C}^*$, $y \rightarrow y_3 + y_4 i$ также индуцирует изоморфизм $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*)$. Можно считать, что он совпадает с α_* , сделав при необходимости замену координат $(y_1; y_2; y_3; y_4) \rightarrow (y_1; y_2; y_3; -y_4)$: группы $\pi_1(U)$ и $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ изоморфны группе \mathbb{Z} , имеющей только два автоморфизма.

Существует непрерывное отображение $s: U \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее равенству $\text{Arg } \alpha(y) = s(y) + \text{Arg}(y_3 + y_4 i)$ для всякого $y \in U$.

Перейдём к построению гомеоморфизма пространства K и сферы S^4 . Последнюю будет удобно понимать как единичную сферу $\{(z_0; z_1; z_2) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}^2 : z_0^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ евклидова пространства $\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}^2$.

Отображение $\varphi_0: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданное формулой

$$\varphi_0(z_1; z_2) := \begin{cases} \left(\frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}; \frac{2 \text{Re}(z_1^2 \overline{z_2})}{|z_1| \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}; \frac{2 \text{Im}(z_1^2 \overline{z_2})}{|z_1| \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} \right), & z_1 \neq 0; \\ (|z_2|; 0; 0), & z_1 = 0, \end{cases}$$

непрерывно, сюръективно, сохраняет длины векторов соответствующих евклидовых пространств, а его слои суть орбиты действия $\mathbb{T}: \mathbb{C}^2, \lambda: (z_1; z_2) \rightarrow (\lambda z_1; \lambda^2 z_2)$. Преобразы подмножеств $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{(0; 0)\}$ и $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{(0; 0)\}$ пространства \mathbb{R}^3 под действием φ_0 совпадают с подмножествами $\{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^2$ соответственно. Следовательно, отображение $\varphi: S^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3, (z_0; z_1; z_2) \rightarrow (z_0; \varphi_0(z_1; z_2))$ непрерывно, его образом является единичная сфера S^3 пространства \mathbb{R}^4 , а слоями — орбиты действия $\mathbb{T}: S^4, \lambda: (z_0; z_1; z_2) \rightarrow (z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2)$:

$$\forall z = (z_0; z_1; z_2) \in S^4 \quad \varphi^{-1}(\varphi(z)) = \{(z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2): \lambda \in \mathbb{T}\}. \quad (5.21)$$

Кроме того, $\varphi^{-1}(I_j) = \{(z_0; z_1; z_2) \in S^4: z_j = 0\}$ и $\varphi^{-1}(U_j) = \{(z_0; z_1; z_2) \in S^4: z_j \neq 0\}$ ($j = 1, 2$).

Существует непрерывная функция $s_0: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, равная нулю в некоторой (одно-сторонней) окрестности точки 1 и удовлетворяющая равенству $s_0(t) + s_0(1-t) = 1$ для всех $t \in [0; 1]$. Пусть $j = 1, 2$, а $s_j: \varphi^{-1}(U_j) \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, принимающая в точке $z = (z_0; z_1; z_2) \in \varphi^{-1}(U_j)$ значение

$$s_j(z) := \begin{cases} \frac{(-1)^j}{2} \cdot s(\varphi(z)) \cdot s_0\left(\frac{|z_j|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right), & z \in \varphi^{-1}(U); \\ 0, & z \in \varphi^{-1}(U_j \setminus U). \end{cases}$$

Функция s_j непрерывна: она равна нулю в некоторой окрестности подмножества $\varphi^{-1}(U_j \setminus U)$, поскольку при $z \in \varphi^{-1}(U_j \setminus U)$ число $\frac{|z_j|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ равно 1. Для точки $z = (z_0; z_1; z_2) \in S^4$ имеем $\alpha_j(\varphi(z)) = 0 \Leftrightarrow \varphi(z) \in I_j \Leftrightarrow z_j = 0$, поэтому функция

$$\varphi_j: S^4 \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = (z_0; z_1; z_2) \rightarrow \begin{cases} \alpha_j(\varphi(z)) \cdot \frac{z_j}{|z_j|} \cdot \exp(-is_j(z)), & z_j \neq 0; \\ 0, & z_j = 0 \end{cases}$$

удовлетворяет соотношениям $|\varphi_j(z)| = \alpha_j(\varphi(z))$, $\varphi_j(z) = 0 \Leftrightarrow z_j = 0$ ($z = (z_0; z_1; z_2) \in S^4$), а значит, непрерывна.

Если $z = (z_0; z_1; z_2) \in \varphi^{-1}(U)$ и $y := \varphi(z) \in S^3$, то $s_0\left(\frac{|z_1|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right) + s_0\left(\frac{|z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right) = 1$, $s_2(z) - 2s_1(z) = s(y)$, комплексное число $y_3 + y_4 i$ равно $\frac{2z_1^2 \bar{z}_2}{|z_1| \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}$, и

$$2 \operatorname{Arg}(\varphi_1(z)) - \operatorname{Arg}(\varphi_2(z)) = \operatorname{Arg}(z_1^2 \bar{z}_2) + (s_2(z) - 2s_1(z)) = \operatorname{Arg}(y_3 + y_4 i) + s(y) = \operatorname{Arg} \alpha(y). \quad (5.22)$$

Рассмотрим непрерывное отображение $\tilde{\varphi}: S^4 \rightarrow S^3 \times \mathbb{C}^2, z \rightarrow (\varphi(z); \varphi_1(z); \varphi_2(z))$.

Лемма 5.3. *Отображение $\tilde{\varphi}$ инъективно, а его образ есть K .*

□ Положим $K' := \tilde{\varphi}(S^4) \subset S^3 \times \mathbb{C}^2$. Из (5.21) следует, что:

$$\begin{aligned} \forall j = 1, 2 \quad \forall z = (z_0; z_1; z_2) \in S^4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{T} \quad \varphi_j(z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2) &= \lambda^j \varphi_j(z); \\ \forall z \in S^4 \quad K' \cap \left(\{\varphi(z)\} \times \mathbb{C}^2 \right) &= \left\{ (\varphi(z); \lambda \varphi_1(z); \lambda^2 \varphi_2(z)): \lambda \in \mathbb{T} \right\}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Значит, любые две точки одного слоя отображения $\tilde{\varphi}$ имеют вид $z = (z_0; z_1; z_2) \in S^4$ и $(z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2) \in S^4$, $\lambda \in \mathbb{T}$, причём $\lambda^j \varphi_j(z) = \varphi_j(z)$ ($j = 1, 2$). Но $\varphi_j(z) = 0 \Leftrightarrow z_j = 0$, откуда $\lambda^j z_j = z_j$ ($j = 1, 2$), то есть $(z_0; \lambda z_1; \lambda^2 z_2) = z$. Тем самым доказана инъективность отображения $\tilde{\varphi}$.

Пусть $y \in S^3$, $K_y := \{w \in \mathbb{C}^2: (y; w) \in K\} \subset \mathbb{C}^2$, $K'_y := \{w \in \mathbb{C}^2: (y; w) \in K'\} \subset \mathbb{C}^2$. Докажем, что $K_y = K'_y$.

Найдутся точки $p \in (S^3)^3$ и $z \in S^4$, такие что $\theta(p) = \varphi(z) = y$. В силу (5.19) и (5.23), K_y и K'_y — орбиты действия $\mathbb{T}: \mathbb{C}^2, \lambda: (w_1; w_2) \rightarrow (\lambda w_1; \lambda^2 w_2)$, содержащие точки $(\theta_1(p); \theta_2(p))$ и $(\varphi_1(z); \varphi_2(z))$ соответственно. Заметим, что $|\theta_j(p)| = \alpha_j(y) = |\varphi_j(z)|$ ($j = 1, 2$), а если $\alpha_1(y), \alpha_2(y) \neq 0$, то $z \in \varphi^{-1}(U)$ и, согласно (5.22), аргумент числа $(\varphi_1(z))^2 \overline{(\varphi_2(z))}$ равен аргументу числа $\alpha(y) = (\theta_1(p))^2 \overline{(\theta_2(p))}$. Поэтому $K_y = K'_y$.

Ввиду произвольности точки $y \in S^3$, подмножество $K \subset S^3 \times \mathbb{C}^2$ совпадает с $K' = \tilde{\varphi}(S^4)$. ■

Теперь, когда построен гомеоморфизм $\tilde{\varphi}: S^4 \rightarrow K$, теорема 1.7 полностью доказана.

5.5. Доказательство теоремы 1.8

Можно считать, что $V_0 = 0$, а представление $G: V$ есть прямая сумма неприводимых представлений $G: V_1$ и $G: V_2$ размерностей 5 и 3 соответственно. Эти представления группы $G \cong \mathbf{SO}_3$ можно отождествить соответственно с её действием на пространстве $\{A \in \text{End}(\mathbb{R}^3): A = A^T, \text{tr } A = 0\}$ матричными сопряжениями и с тавтологическим представлением $\mathbf{SO}_3: \mathbb{R}^3$.

Положим $D := \left\{ \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \text{End}(\mathbb{R}^3): \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \right\} \subset V_1$. Далее, для оператора $A \in D$ обозначим через Z_A подгруппу $\{g \in \mathbf{SO}_3: gA = Ag\} \subset \mathbf{SO}_3$. Действие $Z_A: \mathbb{R}^3$ задаёт отношение эквивалентности τ_A на пространстве \mathbb{R}^3 .

Каждая орбита действия $G: V$ пересекает подмножество $D \times \mathbb{R}^3 \subset V$, причём элементы $(A; v)$ и $(A'; v')$ ($A, A' \in D, v, v' \in \mathbb{R}^3$) лежат в одной орбите тогда и только тогда, когда $A = A'$ и $v \tau_A v'$. Отсюда каноническое отображение $D \times \mathbb{R}^3 \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/G$ сюръективно, а его слои суть декартовы произведения одноэлементных подмножеств $\{A\} \subset D$ на классы соответствующих отношений эквивалентности τ_A в \mathbb{R}^3 . Ограничивая действия $Z_A: \mathbb{R}^3$ ($A \in D$) на инвариантную единичную сферу S^2 , получаем, что фактор V/G гомеоморфен факторпространству топологического пространства $D \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times S^2$ по отношению эквивалентности

$$(A; r; v) \sim (A; r; v'): \quad (r = 0) \vee (v \tau_A v') \quad (A \in D, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, v, v' \in S^2).$$

Подмножество $D \subset \text{End}(\mathbb{R}^3)$ содержит операторы $A_0 := \text{diag}(1; 1; -2)$ и $A_1 := \text{diag}(2; -1; -1)$, гомеоморфно замкнутой полуплоскости, а его граница есть объединение лучей $I_i := \mathbb{R}_{\geq 0} A_i$ ($i = 0, 1$), пересекающихся по нулевому оператору. Следовательно,

существует гомеоморфизм топологических пространств D и

$$(\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0; 1]) / \{(0; t) \sim (0; t') : t, t' \in [0; 1]\},$$

переводящий каждый из лучей $I_i \subset D$ ($i = 0, 1$) в подмножество $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{i\}$ (а точку $0 \in D$ — в класс эквивалентности $\{0\} \times [0; 1] \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0; 1]$). В дальнейшем мы будем отождествлять эти топологические пространства с помощью указанного гомеоморфизма.

Всякая подгруппа вида Z_A , $A \in D$, содержит подгруппу H всех диагональных операторов группы \mathbf{SO}_3 . Более точно,

$$Z_A = \begin{cases} \mathbf{SO}_3, & A = 0; \\ Z_{A_i}, & A \in I_i \setminus \{0\} \quad (i = 0, 1); \\ H, & A \in \text{Int } D. \end{cases} \quad (5.24)$$

Выясним, как устроен фактор S^2/H . Для этого заметим, что H есть чётная подгруппа конечной группы отражений, соответствующей системе корней $\{\pm e_i : i = 1, 2, 3\}$, где (e_1, e_2, e_3) — стандартный базис в \mathbb{R}^3 . Через C обозначим камеру Вейля $\{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$, а через M — её пересечение со сферой S^2 . Отображение $M \times \{\pm 1\} \rightarrow S^2$, $((x_1; x_2; x_3); j) \rightarrow (jx_1; jx_2; jx_3)$ ($(x_1; x_2; x_3) \in M$, $j = \pm 1$) задаёт естественный гомеоморфизм φ топологических пространств

$$\widehat{M} := (M \times \{\pm 1\}) / \{(v; 1) \sim (v; -1) : v \in \partial M\} \quad (5.25)$$

и S^2/H . В дальнейшем будем отождествлять их при помощи φ .

Пусть $A \in D$ — произвольный оператор. Каждая орбита действия группы $H \subset Z_A$ на сфере S^2 целиком содержится в одном классе отношения эквивалентности τ_A , что позволяет ввести индуцированное отношение эквивалентности $\widetilde{\tau}_A$ на факторе $S^2/H \cong \widehat{M}$. В таком случае фактор V/G гомеоморфен факторпространству топологического пространства $D \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \widehat{M}$ по отношению эквивалентности

$$(A; r; w) \sim (A; r; w') : (r = 0) \vee (w \widetilde{\tau}_A w') \quad (A \in D, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, w, w' \in \widehat{M}).$$

Положим $\tau_i := \tau_{A_i}$, $\widetilde{\tau}_i := \widetilde{\tau}_{A_i}$ ($i = 0, 1$). Согласно (5.24), отношение эквивалентности $\widetilde{\tau}_A$ при $A \in \text{Int } D$ тривиально (все элементы попарно не эквивалентны), при $A \in I_i \setminus \{0\}$ ($i = 0, 1$) совпадает с отношением $\widetilde{\tau}_i$, а при $A = 0$ имеет единственный класс эквивалентности — \widehat{M} . Отсюда фактор V/G гомеоморфен факторпространству декартова произведения $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times [0; 1] \times \widehat{M}$ по отношению эквивалентности

$$\begin{aligned} (0; r; t; w) &\sim (0; r; t'; w') & (r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t, t' \in [0; 1], w, w' \in \widehat{M}); \\ (s; 0; t; w) &\sim (s; 0; t; w') & (s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t \in [0; 1], w, w' \in \widehat{M}); \\ (s; r; t; w) &\sim (s; r; t; w') & (s, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t = 0, 1, w, w' \in \widehat{M}, w \widetilde{\tau}_t w'). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Установим связь между отношениями эквивалентности $\tilde{\tau}_0$ и $\tilde{\tau}_1$.

Рассмотрим оператор $g \in \mathbf{SO}_3$, переводящий базисные векторы $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ базиса в векторы e_3, e_1, e_2 соответственно. Легко видеть, что $A_0 = -gA_1g^{-1}$, $Z_{A_0} = gZ_{A_1}g^{-1}$, $\tau_0 = g\tau_1$ (т.е. $v\tau_1v' \Leftrightarrow (gv)\tau_0(gv')$). Кроме того, оператор g нормализует подгруппу $H \subset \mathbf{SO}_3$ и потому индуцирует гомеоморфизм $\tilde{g}: S^2/H \rightarrow S^2/H$, причём $\tilde{\tau}_0 = \tilde{g}\tilde{\tau}_1$.

Предложение 5.3. *В классе гомеоморфизмов $\widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$ гомеоморфизмы \tilde{g} и $\text{id}_{\widehat{M}}$ гомотопны, то есть существует семейство гомеоморфизмов $\tilde{g}_t: \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$ ($t \in [0; 1]$), такое что $\tilde{g}_0 \equiv \text{id}_{\widehat{M}}$, $\tilde{g}_1 \equiv \tilde{g}$, а отображение $[0; 1] \times \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$, $(t; w) \rightarrow \tilde{g}_t(w)$ непрерывно.*

□ Ясно, что $gC = C$ и $gM = M$. Гомеоморфизм $\tilde{g}: \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$ индуцируется гомеоморфизмом $g|_M: M \rightarrow M$ с учётом определения (5.25). В классе гомеоморфизмов $M \rightarrow M$ гомеоморфизм $g|_M$, будучи поворотом сферического треугольника M , гомотопен id_M , что немедленно влечёт требуемое. ■

Гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times [0; 1] \times \widehat{M}$ в себя, действующий по формуле $(s; r; t; w) \rightarrow (s; r; t; \tilde{g}_t(w))$, превращает отношение эквивалентности (5.26) в отношение эквивалентности

$$\begin{aligned} (0; r; t; w) &\sim (0; r; t'; w') & (r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t, t' \in [0; 1], w, w' \in \widehat{M}); \\ (s; 0; t; w) &\sim (s; 0; t; w') & (s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t \in [0; 1], w, w' \in \widehat{M}); \\ (s; r; t; w) &\sim (s; r; t; w') & (s, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t = 0, 1, w, w' \in \widehat{M}, w \tilde{\tau}_0 w'). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Следовательно, фактор V/G гомеоморфен факторпространству декартова произведения $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times [0; 1] \times \widehat{M}$ по отношению эквивалентности (5.27).

При помощи сферической замены координат $x_1 = \sin(\frac{\pi}{2}u_1)\cos(\frac{\pi}{2}u_2)$, $x_2 = \sin(\frac{\pi}{2}u_1)\sin(\frac{\pi}{2}u_2)$, $x_3 = \cos(\frac{\pi}{2}u_1)$ получаем, что $M \cong [0; 1]^2 / \{(0; u_2) \sim (0; u'_2): u_2, u'_2 \in [0; 1]\}$, а пространство \widehat{M} гомеоморфно факторпространству декартова произведения $[0; 1]^2 \times \{\pm 1\}$ по отношению эквивалентности

$$\begin{aligned} (0; u_2; j) &\sim (0; u'_2; j') & (u_2, u'_2 \in [0; 1], j, j' = \pm 1); \\ (1; u_2; 1) &\sim (1; u_2; -1) & (u_2 \in [0; 1]); \\ (u_1; u_2; 1) &\sim (u_1; u_2; -1) & (u_1 \in [0; 1], u_2 = 0, 1). \end{aligned}$$

Подгруппа $Z_{A_0} \subset \mathbf{SO}_3$ порождена вращениями вокруг прямой $\mathbb{R}e_3$ на всевозможные углы, а также оператором $\text{diag}(1; -1; -1)$. Значит, отношение эквивалентности $\tilde{\tau}_0$ на множестве \widehat{M} есть не что иное как $\{(u_1; u_2; j) \sim (u_1; u'_2; j'): u_1, u_2, u'_2 \in [0; 1], j, j' = \pm 1\}$, а фактор V/G гомеоморфен факторпространству декартова произведения $\mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times [0; 1]^3 \times$

$\times \{\pm 1\}$ по отношению эквивалентности

$$\begin{aligned}
(0; r; t; u_1; u_2; j) &\sim (0; r; t'; u'_1; u'_2; j') & (r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t, t', u_i, u'_i \in [0; 1], j, j' = \pm 1); \\
(s; 0; t; u_1; u_2; j) &\sim (s; 0; t; u'_1; u'_2; j') & (s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t, u_i, u'_i \in [0; 1], j, j' = \pm 1); \\
(s; r; t; u_1; u_2; j) &\sim (s; r; t; u_1; u'_2; j') & (s, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t = 0, 1, u_1, u_2, u'_2 \in [0; 1], j, j' = \pm 1); \\
(s; r; t; 0; u_2; j) &\sim (s; r; t; 0; u'_2; j') & (s, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t, u_2, u'_2 \in [0; 1], j, j' = \pm 1); \\
(s; r; t; 1; u_2; 1) &\sim (s; r; t; 1; u_2; -1) & (s, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t, u_2 \in [0; 1]); \\
(s; r; t; u_1; u_2; 1) &\sim (s; r; t; u_1; u_2; -1) & (s, r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, t, u_1 \in [0; 1], u_2 = 0, 1).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Образ отображения

$$\pi: \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times [0; 1]^3 \times \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}^5, (s; r; t; u_1; u_2; j) \rightarrow (s; r; st; sru_1; s^3rt(1-t)u_1u_2)$$

совпадает с подмножеством

$$K := \{(s; r; t; u_1; u_2) \in \mathbb{R}^5 : s, r, t, u_1, u_2 \geq 0, t \leq s, u_1 \leq sr, u_2 \leq t(s-t)u_1\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Функция $\alpha: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}, (s; r; t; u_1; u_2) \rightarrow (sr - u_1)u_2(t(s-t)u_1 - u_2)$ равна нулю на ∂K и положительна в $\text{Int } K$. Поэтому образ отображения

$$\tilde{\pi}: \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times [0; 1]^3 \times \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^5 \oplus \mathbb{R}, p = (s; r; t; u_1; u_2; j) \rightarrow (\pi(p); j\alpha(\pi(p)))$$

совпадает с подмножеством

$$\{(p; y) \in K \times \mathbb{R} : |y| = \alpha(p)\} \subset K \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5 \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^6,$$

гомеоморфным $(K \times \{\pm 1\}) / \{(x; 1) \sim (x; -1) : x \in \partial K\}$. Его слои суть классы отношения эквивалентности (5.28):

$$\tilde{\pi}(s; r; t; u_1; u_2; j) = (s; r; st; sru_1; s^3rt(1-t)u_1u_2; js^7r^3t^2(1-t)^2u_1^2(1-u_1)u_2(1-u_2)).$$

Существует гомеоморфизм из пятимерного замкнутого полупространства в подмножество $K \subset \mathbb{R}^3$, переводящий граничную гиперплоскость в ∂K .

Литература

- [1] О. Г. Стырт, «О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой», *Тр. ММО*, **70** (2009), 235—287.